ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. О. Оганесян

О задаче Коши для слабо гиперболических систем с данными на гиперплоскости вырождения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 9/VI 1975)

Как известно [1], задача Коши для строго гиперболических систем поставлена корректно. При нарушении условия строгой гиперболичности корректность задачи зависит от поведения коэффициентов (матриц) при младших производных. Некоторые классы слабо гиперболических систем, для которых кратности характеристических корней постоянны и не превышают трех, рассмотрены в [2], [3]. В работе [4] изучается характеристическая задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на гиперплоскости с начальными данными. Некоторые классы систем в двумерном случае рассмотрены в [5].

Ниже рассматривается задача Коши для системы

$$Lu = Au + Bu = f, \tag{1}$$

где

$$A = \| A_{ij}(x, D) \|_1^s, \quad B = \| B_{ij}(x, D) \|_1^s,$$

$$A_{ii} = D_1^{k_i}, \qquad A_{ij} = 0 \quad i \neq j, \qquad B_{ij}(x, D) = a_\alpha^{ij}(x) D^\alpha, \quad |\alpha| \leq k_i - 1, 1$$

$$u = {}^t(u_1, \ldots, u_s), \quad f = {}^t(f_1, \ldots, f_s)$$

$$D_1^{p_i} u_i(0, x') = 0 \qquad (p_i = 0, \ldots, k_i - 1) \tag{2}$$

Коэффициенты $a_\alpha^{ij}(x)$ имеют производные порядка $\sum\limits_{i \neq j} k_j = m + 1 - k_i$ и бесконечно дифференцируемы по $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ при $|\alpha| = k_i$.

Задача рассматривается в области $V_t = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\ 0 < x_1 < t\}$. Обозначим S_t — гиперплоскость $x_1 = t$. для любого вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ a' означает вектор $a' = (a_2, \ldots, a_n)$. Для оценок используется норма

$$|D^{p,q} u, V_t|^2 = \int D^\alpha u_i \overline{D^\alpha u_i} \, dV_t \tag{3}$$

$$(|\alpha| \leq p, q; \quad i = 1, \ldots, s)$$

Пусть Pq — главная часть оператора q.

Оператор $q(x, D)$ называется слабо гиперболическим (относительно первой координаты), если уравнение

$$a(x, \zeta) \equiv \det Pq(x, \zeta) = 0 \tag{4}$$

имеет $m+1$ действительных корней.

Пусть элементами полиномиальной матрицы $G(x, \zeta)$ являются алгебраические дополнения матрицы $Pq(x, \zeta)$, так что

$$G(x, \zeta) Pq(x, \zeta) = a(x, \zeta) E \tag{5}$$

Тогда имеем

$$a(x, D) E u = -L(x, D) u + G(x, D) f \tag{6}$$

где L — некоторый матричный дифференциальный оператор порядка $< m$.

Пусть оператор $b(x, D)$ разделяет оператор $a(x, D)$ [1]. Умножим обе части (6) на $\overline{b(u)} = (\overline{b(u_1)}, \ldots, \overline{b(u_s)})$ и проинтегрируем по V_{x_1}

$$\int \overline{b(u_i)}\, a(u_i)\, dV_{x_1} = -\int \overline{b(u)}\, Lu\, dV_{x_1} + \int \overline{b(u)} Gf\, dV_{x_1} \tag{7}$$

$$(i = 1, \ldots, s)$$

Воспользуемся тождеством [1]

$$a\bar{b} + \bar{a}b = (D_j + \overline{D}_j) A^j + A^0 \tag{8}$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

$$2\int \mathrm{Re}[\overline{b(u_r)} a(u_r)]\, dV_{x_1} = \int A^1(u_r, \bar{u}_r)\, dS_{x_1} - \int A^1(u_r, \bar{u}_r)\, dS_0 + \int A^0(u_r, \bar{u}_r)\, dV_{x_1}, \tag{9}$$

$$(r = 1, \ldots, s).$$

Пусть $\lambda_1(x, \zeta'), \ldots, \lambda_{m+1}(x, \zeta')$ — характеристические числа оператора $a(x, D)$

Обозначим

$$\Delta_s = \sum_{k_i < k_j} \prod |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|^2, \quad \Delta_1 = m+1, \quad (s = 2, \ldots, m+1) \tag{10}$$

где суммирование производится по всем наборам $(k_1, \ldots, k_s)$ из чисел $(1, 2, \ldots, m+1)$. Далее, пусть $R(x, D')$ матричный псевдодифференциальный оператор с символом

$$r(x, i\eta') = \| r_{pl}(x, i\eta') \|_1^{m+1}, \tag{11}$$

где $\dfrac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}} r^*_{lp} = a_{lp} - \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} r^*_{lk} r_{kp}$, $p < l$, $r^*_{ij} = \bar{r}_{ji}$, (суммирование только по $k = 1, 2, \ldots, p-1$)

$$r_{pl} = 0 \quad \text{при} \quad p > l \text{ и } r_{pp} = 1 \quad p = 1, \ldots, m+1,$$

$$r_{1p} = \frac{1}{\Delta_1} a_{1p}, \qquad \Delta_0 = 1,$$

$$a_{pl}=\sum_{k=1}^{m+1}\Big[(-1)^{p+l}\sum_{\substack{l_1<\ldots<l_{p-1}\\ l_1\ldots l_{p-1}\neq k}}\lambda_{l_1}\lambda_{l_2}\cdots\lambda_{l_{p-1}}\overline{\sum_{\substack{j_1<\ldots<j_{l-1}\\ j_1\ldots j_{l-1}\neq k}}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{l-1}}}\Big]$$

$$\lambda_i=\lambda_i(x,i\tau_i'),\quad \lambda_{l_0}=\lambda_{j_0}=1.$$

Имеет место

Лемма [5]. *Пусть* $\Delta_i(x,i\tau_1')$ *удовлетворяют условиям*

$$c_i'(\rho^{s}u(x_1)|\tau_{ij}|)^{2(i-1)}\leqslant\frac{\Delta_i(x,i\tau_i')}{\Delta_{i-1}(x,i\tau_i')}\leqslant c_i(\rho^{s}u(x_1)|\tau_{ij}|)^{2(i-1)} \tag{12}$$

$$\left|D^{\gamma}\partial^{\beta}\left(\frac{\Delta_i(x,i\tau_i')}{\Delta_{i-1}(x,i\tau_i')}\right)\right|\leqslant c(\rho^{s}u(x_1)|\tau_{ij}|)^{2(i-1)}|\tau_i'|^{-|\beta|} \tag{13}$$

$$(j=2,\ldots,n)$$

для каждого $i=1,\ldots,m+1$; $|\beta|\leqslant q$; $|\gamma|\leqslant p$; c_i', $c_i=\mathrm{const}$; $\tau_{ij}>0$, $u(x_1)\geqslant 0$, $\partial^{\beta}=\partial_2^{\beta_2}\ldots\partial_n^{\beta_n}$, $\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial\tau_{ij}}$, $D^{\gamma}=D_2^{\gamma_2}\ldots D_n^{\gamma_n}$, $D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.
Если коэффициенты оператора $a(x,D)$ *слабо зависят от* x' [5], *то существует постоянная* $c>0$, *не зависящая от* u_p, *такая, что*

$$\int A^1(u_p,\overline{u_p})dS_{x_1}\geqslant c\int|(\rho^{s}uD_j)^{m+1}(R\Theta_p)_1|^2dS_{x_1}-$$

$$-\frac{1}{c}\int\sum_{q=0}^{k-2}|(\rho^{s}uD_j)^{q}(R\Theta_p)_k|^2dS_{x_1} \tag{14}$$

$$(j=2,\ldots,n;\quad i=1,\ldots,m+1;\ k=2,\ldots,m+1)$$

для любого $p=1,\ldots,s$, $\Theta_p={}^{t}(D_1^{m}u_p,\ldots,u_p)$.

Преобразуем интегралы от операторов порядка $\leqslant m$

$$\int\overline{b(u)}Lu\,dV_{x_1}=\int\overline{b(u_p)}L_{pp}(u_p)dV_{x_1}+\int\overline{b(u_l)}L_{lq}(u_q)dV_{x_1}\quad(l\neq q) \tag{15}$$

$$\int A^{0}(u_p,\overline{u}_p)dV_{x_1}=\int\overline{b(u_p)}Q(u_p)dV_{x_1}+\int A^{01}(u_p,\overline{u}_p)dV_{x_1} \tag{16}$$

$$(p,\ l,\ q=1,\ldots,s)$$

Объединим первые слагаемые в (15) и (16)

$$\int\overline{b(u_p)}L_{pp}(u_p)dV_{x_1}+\int\overline{b(u_p)}Q(u_p)dV_{x_1}=\int\overline{b(u_p)}L_{pp}^1(u_p)dV_{x_1} \tag{17}$$

$$(p=1,\ldots,s)$$

В дальнейшем будем считать такое объединение заранее сделанным и опускать индекс 1 в L_{pp}^1 и A^{01}.

Пусть $b_h(x,D)$ $(h=0,\ldots,m)$—последовательность операторов, таких, что b_{h+1} разделяет b_h, $b_0(x,D)=a(x,D)$, $b_1(x,D)=b(x,D)$. Пусть W—некоторая величина, определенная для оператора $a(x,D)$. Через W^h будем обозначать аналогичную величину для оператора $b_h(x,D)$. При этом $W^0=W$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть для операторов* b_h $(h=0,\ldots,m)$ *имеют место оценки типа* (14). *Далее, пусть*

$$1.\ A^{0h}(x,\xi) = (\chi_{0h}+\nu_{0h}D_1)[(\lambda \overset{h}{\omega}_{ij}(x_1)|\xi_j|)^{2q-1}|(r^h(x,\xi')\omega_h)_i|^2].$$

$$2.\ L_{lq}(x,\xi) = (\varphi^{(\gamma)h}_{lq} + \pi^{(\gamma)h}_{lq}D_1)(\lambda \overset{h}{\omega}_{ij}(x_1)|\xi_j|)^{i-1}|\xi'|^{\gamma} \times$$

$$\times (r^h(x,\xi')\omega_h)_i + \Psi^{p\alpha\gamma}_{lq}\xi'^{\alpha} q_{pl}(x,\xi)$$

$$(l,p,q=1,\dots,s;\ i=1,\dots,m+1-h;\ h=0,\dots,m;\ \gamma=0,\dots,i-1;$$

$$j=2,\dots,n;\ \ |\alpha|\leqslant m-k_l,\ (0),$$

где $\mathrm{Re}\,\xi'=0$, $\chi_{0h}(x,\xi')$, $\nu_{0h}(x,\xi')$, $\varphi^{(\gamma)h}_{lq}(x,\xi')$, $\pi^{(\gamma)h}_{lq}(x,\xi')$, $\Psi^{p\alpha}_{lq}(x,\xi')$ *имеют производные n-ого порядка по* ξ', x' *принадлежащие* L_1 *равномерно по* x_1 *и* ξ' *и нулевую степень однородности по* ξ', $\overset{h}{\omega}_{ij}>0$ $\lambda(x_1)\to 0$ *при* $x_1\to 0$, $D_1\lambda(x_1)>0$, $\mu(x_1)>0$ *при* $x_1\geqslant\varepsilon$ *для любого* $\varepsilon>0$ $\omega^h={}^t(\xi_1^{m-h},\dots,1)$.

Тогда для любого $f={}^t(f_1,\dots,f_s)$, $f_l\in H^{m+1-k_l,d}$ *— где* d *достаточно большая постоянная, существует единственное решение* u, $u_l\in H^{m,D}$, *задачи* (1)–(2). *При этом*

$$|D^{m}u,\ V_l|\leqslant c(|D^{m-k_l-1+d}f_l,\ S_0|+|D^{m+1-k_l,d}f_l,\ V_l|) \qquad (18)$$

$$(i=1,\dots,s).$$

Примеры. Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными данными для системы

$$D_1u_1+a^k_{11}D_ku_1+a^k_{12}D_ku_2+c_{11}u_1+c_{12}u_2=f_1,$$

$$D_1u_2+a^k_{21}D_ku_1+a^k_{22}D_ku_2+c_{21}u_1+c_{22}u_2=f_2. \qquad (19)$$

$$(k=2,\dots,n)$$

Обозначим

$$a_{kl}=(a^k_{11}-a^k_{22})(a^l_{11}-a^l_{22})+4a^k_{12}a^l_{21}$$

$$\gamma^l_{11}=\frac{1}{2}c_{11}(a^l_{22}-a^l_{11})-\frac{1}{2}D_1(a^l_{22}-a^l_{11})-a^l_{12}c_{21}+a^k_{22}D_k a^l_{11}-$$

$$-a^k_{12}D_k a^l_{21}+\frac{1}{4}(a^k_{11}+a^k_{22})D_k(a^l_{11}+a^l_{22})$$

$$\gamma^l_{22}=\frac{1}{2}c_{22}(a^l_{11}-a^l_{22})-\frac{1}{2}D_1(a^l_{11}-a^l_{22})-a^l_{21}c_{12}+a^k_{11}D_k a^l_{22}-$$

$$-a^k_{21}D_k a^l_{12}+\frac{1}{4}(a^k_{11}+a^k_{22})D_k(a^l_{11}+a^l_{22}).$$

$$\gamma^l_{21}=\frac{1}{2}c_{21}(a^l_{11}-a^l_{22})-a^l_{21}c_{11}.$$

$$\gamma^l_{12}=\frac{1}{2}c_{12}(a^l_{22}-a^l_{11})-a^l_{12}c_{22}\quad(i,\ k,\ l=2,\dots,n)$$

Пусть выполнены условия

$$c_2\lambda^{2\alpha_k}(x_1)|\xi_k|^2 \leqslant a_{kl}\xi_k\bar\xi_l \leqslant c\lambda^{2\alpha_k}(x_1)|\xi_k|^2$$

$$D_l\,(a_{kl})\xi_k\bar\xi_l \leqslant c\lambda^{2\alpha_k}(x_1)|\xi_k|^2 \tag{20}$$

$$D_1(a_{kl})\xi_k\bar\xi_l \leqslant c(1+D_1)\lambda^{2\alpha_k}(x_1)|\xi_k|^2 \quad (\mathrm{Re}\,\xi' = 0)$$

$$(i,\ k,\ l = 2,\ \ldots,\ n;\quad \alpha_k > 0).$$

Тогда условие 2 примет вид

$$\psi^1_{js}\xi_1 = \varphi^1_{js}|\xi_1| + \frac{1}{2}(a^k_{11} + a^k_{22})\xi_k| + \varphi^2_{js}(\tau + D_1)\lambda^{\alpha_k}(x_1)\xi_k +$$

$$+ \psi^1_{js}|\xi_1| + (a^k_{11} + a^k_{12})\xi_k| + \psi^2_{js}|\xi_1| + (a^k_{21} + a^k_{12})\xi_k|$$

$$(j,\ s = 1,\ 2;\quad k = 2,\ \ldots,\ n) \tag{21}$$

При $n=2$, $a^2_{11}=a^2_{22}=0$, $a^2_{21}=1$, $a^2_{12}=x_1^n$ условие (21) выполняется, если функции c_{11}, $x_1^{\frac{n}{2}}c_{12}$, c_{21}, c_{22} ограничены, что совпадает с результатом работы ([3]).

Рассмотрим систему двух уравнений второго порядка с нулевыми начальными данными

$$D_1^2u_1 - a_1^{ij}(x)D_i\,D_ju_1 + b^{\alpha}_{1s}D^{\alpha}u_s = f_1$$

$$D_1^2u_2 - a_2^{ij}(x)D_i\,D_ju_2 + b^{\alpha}_{2s}D^{\alpha}u_s = f_2 \tag{22}$$

$$(i,\ j = 2,\ \ldots,\ n;\quad s = 1,\ 2;\quad |\alpha| \leqslant 1)$$

Пусть имеют место неравенства

$$c_2\lambda^{2\alpha^s_k}(x_1)|\xi_k|^2 \leqslant a_s^{ij}(x)\xi_i\bar\xi_j \leqslant c\lambda^{2\alpha^s_k}(x_1)|\xi_k|^2 \tag{23}$$

$$D_1\,a_s^{ij}(x)\xi_i\bar\xi_j \leqslant c(1+D_1)\lambda^{2\alpha^s_k}(x_1)|\xi_k|^2.$$

$$D_k\,a_s^{ij}(x)\xi_i\bar\xi_j \leqslant c\lambda^{2\alpha^s_k}(x_1)|\xi_k|^2 \quad (\mathrm{Re}\,\xi' = 0),$$

$$(k,\ i,\ j = 2,\ \ldots,\ n;\quad s = 1,\ 2;\quad \alpha^s_k > 0).$$

Тогда для выполнения условий корректности достаточно, чтобы

$$|b^{0\alpha}_{ll}\xi_\alpha|^2 \leqslant c\,|(1 + D_1)\lambda^{\alpha^l_k}\xi_k|^2$$

$$|b^{0\alpha}_{lr}\xi_\alpha| \leqslant c\,|(1 + D_1)(\lambda^{\alpha^1_k} + \lambda^{\alpha^2_k})\xi_k|^2 \quad (l \neq r) \tag{24}$$

$$(l,\ k = 2,\ \ldots,\ n;\quad l,\ r = 1,\ 2).$$

Ереванский государственный университет

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Թույլ հիպերբոլական սիստեմների համար վերացման հիպերհարթության վրա սկզբնական տվյալներով Կոշու խնդրի մասին

Հոդվածում քննարկվում է Կոշու խնդիրը թույլ հիպերբոլական սիստեմների համար։ Ենթադրվում է, որ սիստեմի գլխավոր մասի գործակիցներն անվերջ դիֆերենցելի են ըստ տարածական փոփոխականների և խարակտերիստիկ թվերի տարբերությունները ձգտում են զրոյի սկզբնական հիպերհարթության մոտենալիս։

Երբ սիստեմի ցածր կարգի գործակիցները բավարարում են որոշակի պայմանների, բերվում է Կոշու խնդրի լուծման գոյության, միակության և կայունության թեորեմ։ Դիտարկվում են օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ ստացված արդյունքները կարող են հաջողությամբ կիրառվել։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Гординг*, Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961. [2] *В. М. Петков*, УМН, т. 27, № 4, 221—222 (1972). [3] *В. М. Петков*, ДАН СССР, т. 209, № 4, 795—797 (1973). [4] *А. Б. Нерсесян*, ДАН СССР, т. 196, № 2, 289—292 (1971). [5] *С. Л. Терсенов*, ДАН СССР, т. 155, № 2, 285—288 (1964). [6] *А. О. Оганесян*, ДАН Арм. ССР, т. 60, № 2 (1975).