ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LX 1975 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Восстановление аналитической функции последовательностью значений ее производных на граничной точке

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 4/III 1975)

Общеизвестно, что аналитическая функция определяется однозначно значениями всех производных в данной внутренней точке области аналитичности, а также восстанавливается своим рядом Тейлора. Но если заданная точка является граничной точкой области, то ясно, что ряд Тейлора как аппарат восстановления непригоден. С другой стороны, существуют классы функций, которые однозначно определяются через последовательность значений всех производных на граничной точке области аналитичности.

Поэтому представляет интерес задача восстановления таких функций посредством значений всех производных на граничной точке.

В данной работе мы рассматриваем класс аналитических в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывных на его границе $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$ функций, которые удовлетворяют условиям

$$|\Phi^{[n]}(z)| \leqslant h^n m_n \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{1}$$

где

$$\Phi^{[n]}(z) = \left(\frac{\Phi^{[n-1]}(z)}{z^{\rho-1}}\right)' \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

обобщённые производные функции $\Phi(z)$ в смысле Г. В. Бадаляна.

Известно ([1]), что условие

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\rho/1+\rho}}\, dr = \infty, \tag{3}$$

где

$$T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n}, \tag{4}$$

характеризует класс единственности в том смысле, что из условия (3) и

$$a_n = \lim_{z \to 0} \frac{\Phi^{[n]}(z)}{z^{\rho-1}} \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} \tag{5}$$

функция $\Phi(z)$ определяется единственным образом. Требуется восстановить функцию $\Phi(z)$ по значениям $\{a_n\}$.

Заметим, что при $\rho = 1$ обобщённые производные (2) обращаются в обыкновенные.

Мы показываем, что решение этой задачи для определенного класса функций $\Phi(z)$, представимых преобразованием Лапласа (при $\rho = 1$) или обобщенным преобразованием Лапласа (при $\frac{1}{2} < \rho$) при предположении, что ее оригинал единственен, приводится к задаче восстановления оригинала по его моментам. А эту задачу, в свою очередь, можно решить с помощью разложений, использующих в качестве базисной системы функций алгебраические ортогональные полиномы. В качестве такой базисной системы мы взяли полиномы Лагерра.

Целесообразность выбора такой системы объясняется тем, что в этом случае коэффициенты ряда получаются зависящими от моментов оригинала и могут быть вычислены, используя заданную последовательность $\{a_n\}$.

Пусть функция $\varphi(x)$ задана и измерима на полуоси $(0, +\infty)$. Очевидно, что при сходимости интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|\, x^{\rho-1} dx \tag{6}$$

функция

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-x^{\rho} z^{\rho}} \varphi(x) x^{\rho-1} dx \tag{7}$$

голоморфна в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывна на его границе $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$.

Для обобщенного преобразования Лапласа (7) приведем одну тауберову лемму, которая нам нужна в дальнейшем.

Лемма. *Пусть* $0 < \alpha < \rho$ *и пусть функция* $\Phi(z)$ *регулярна в угле* $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$, $\frac{1}{2} < \rho$, представима формулой (7) и удовлетворяет условиям

$$\Phi'(z) = 0\left(\frac{1}{|z|^{\alpha\rho-1}}\right), \ \Phi(z) \to 0 \left(z \to \infty,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{8}$$

тогда

$$\varphi(x) = 0(x^{\alpha\rho-\rho}) \qquad \textit{при} \quad x \to 0 \tag{9}$$

Доказательство леммы, когда $\rho = 1$, можно найти в работе [3] (стр. 232), а при $\frac{1}{2} < \rho$ легко приводится к рассмотренному с помо щью замены переменной.

Обозначим

$$\beta_n = \sup_{k<n} \frac{|a_k|}{k!}, \tag{10}$$

Определение 1. *Через A_μ обозначим класс аналитических в полуплоскости $Re z > 0$ и непрерывных в $Re z \geqslant 0$ функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих условиям*

$$\Phi'(z) = 0\left(\frac{1}{(z)^{3/4-\mu}}\right), \quad \Phi(z) \to 0 (z \to \infty,\ Re z > 0) \quad 0 < \mu < 1 \tag{11}$$

$$\beta_n \sim \frac{n!}{2^n n^{1+\gamma}} \quad \gamma > 0. \tag{12}$$

Теорема 1. *Всякую функцию $\Phi(z)$ из класса A_μ можно представить в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(n+1)}{k!(n-k)!(1+z)^{k+1}} \right|, \tag{13}$$

где

$$C_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a_k}{(k!)^2 (n-k)!}, \tag{14}$$

причем ряд (13) *сходится к* $\Phi(z)$ *равномерно в полуплоскости* $Re z > 0$.

Доказательство. Запишем формальный ряд Фурье—Лагерра функции $\varphi(x)$ (определённой в (6), когда $\rho = 1$) в несколько изменённом виде

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} B_k e^{-x} L_k^{(0)}(x), \tag{15}$$

где

$$L_n^{(0)}(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x} \right)$$

многочлены Лагерра нулевого рода, а

$$B_k = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{\infty} \varphi(x)\, L_k^{(0)}(x)\, dx \tag{16}$$

коэффициенты ряда Фурье — Лагерра функции $\varphi(x)$.

Покажем, что ряд (15) при предположении (12) сходится равномерно в $(0, +\infty)$. Действительно, так как

$$L_n^{(0)}(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)(-x)^k}{\Gamma(k+1)k!(n-k)!},$$

то, подставляя выражение $L_k^{(0)}(x)$ в формулу (16), получим

$$B_n=\frac{1}{n!\,\Gamma(n+1)}\int\limits_0^\infty \varphi(x)\,(-1)^n n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1)\,(-x)^k}{\Gamma(k+1)k!(n-k)!}\right)dx=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k!)^2(n-k)!}\int\limits_0^\infty \varphi(x)x^k\,dx=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a_k}{(k!)^2(n-k)!}. \tag{17}$$

Следовательно

$$|B_n|=\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k ak}{(k!)^2(n-k)!}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\dfrac{a_k}{k!}\,k!}{(k!)^2(n-k)!}\right|<$$

$$<\beta_n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}=\frac{\beta_n\cdot 2^n}{n!}\sim\frac{1}{n^{1+\gamma}}.$$

Таким образом ряд (15) мажорируется равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x/2}}{\sqrt[4]{nx}}\,\frac{1}{n^{1+\gamma}}\qquad x\in(0,+\infty)$$

и, следовательно, (15) сходится равномерно в $(0,+\infty)$.

Из леммы следует, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty\frac{e^{-x/2}}{\sqrt[4]{x}}\,\varphi(x)\,dx$$

сходится и, следовательно, согласно теореме Успенского ([3], стр. 614) функция $\varphi(x)$ представляется рядом Фурье — Лагерра

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n e^{-x}L_n^{(0)}(x), \tag{18}$$

где

$$B_n=\frac{1}{(n!)^2}\int\limits_0^\infty\varphi(x)L_n^{(0)}(x)dx.$$

Подставляя выражение (18) в (7) и замечая, что ряд (18) сходится равномерно, будем иметь

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\int\limits_0^\infty e^{-xz}e^{-x}L_n^{(0)}(x)dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\int\limits_0^\infty e^{-x(1+z)}n!(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1)\,(-x)^k}{k!(n-k)!\,\Gamma(k+1)}\right)dx=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n n! \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(n+1)}{k!(n-k)!(1+z)^{k+1}} \right].$$

Теорема 1 доказана.

Определение 2. Условимся говорить, что функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $A_\rho(\mu)$, если она регулярна в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$, непрерывна на границе $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$ и удовлетворяет условиям (12) и

$$\Phi'(z) = 0\left(\frac{1}{|z|^{2+\frac{1}{4\rho}-\frac{\mu}{\rho}}}\right), \quad \Phi(z) \to 0 \left(z \to \infty, \ |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}\right) \tag{19}$$

$$0 < \mu < \rho$$

Легко видеть, что методом доказательства теоремы 1 можно доказать также теорему:

Теорема 2. *Всякую функцию $\Phi(z)$ из класса $A_\rho(\mu)$ можно представить в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! B_n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)(-1)^k}{k!(n-k)!\rho(1+z^\rho)^{k+1}} \right],$$

где коэффициенты B_n определяются как в (16).

Известно, что функция

$$\Phi(z) \in H^2_{1/2}(-\infty, +\infty), \tag{20}$$

если

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \psi(x) dx, \tag{21}$$

где

$$\psi(x) \in L^2 [e^{-x}; \ (0, +\infty)]. \tag{22}$$

Тогда методом теоремы 4.1 работы ([1]) можно доказать, что всякую функцию $\Phi(z) \in H^2_{1/2}(-\infty, +\infty)$ в классе единственности можно представить в виде ряда (13), который сходится равномерно внутри полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1/2$.

Таким образом, функции из класса $H^2_{1/2}(-\infty, +\infty) \cap U$, где U— класс единственности, восстанавливаются при помощи значений $|a_n| = |\Phi^{(n)}(0)|$.

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну на постановку задачи и полезные советы.

Ереванский политехнический институт имени К. Маркса

Վ. Մ. ԽԴՐՑԱՐՅԱՆ

Անալիտիկ ֆունկցիայի վերականգնումը տիրույթի եզրային կետում նրա հաջորդական ածանցյալների արժեքներով

Աշխատանքում դիտարկվում է $|\arg z| < \pi/2\rho$ անկյան մեջ անալիտիկ և նրա եզրի վրա անընդհատ անալիտիկ ֆունկցիաների դասը, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$|\Phi^{[n]}(z)| \leqslant h^n m_n \quad n = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

որտեղ

$$\Phi^{[n]}(z) = \left(\frac{\Phi^{[n-1]}(z)}{z^{\rho-1}}\right)' \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

ֆունկցիայի Հ. Վ. Բադալյանի իմաստով ընդհանրացված անցյալներն են։

Հայտնի է ([1]), որ

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\rho/(1+\rho)+1}}\, dr = \infty \tag{3}$$

պայմանը, որտեղ

$$T(r) = \sup_n \frac{r^n}{m_n} \tag{4}$$

բնութագրում է միակության դասը այն իմաստով, որ $\Phi(z)$ ֆունկցիան միակ ձևով է որոշվում

$$a_n = \lim_{z \to 0} \frac{\Phi^{[n]}(z)}{z^{\rho-1}} \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} \tag{5}$$

արժեքների միջոցով։

Աշխատանքում տրված է մի հանրագումարման մեթոդ, որը թույլ է տալիս վերականգնել $\Phi(z)$ ֆունկցիան $|a_n|$ հաջորդականության միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Бадалян* «Известия АН СССР», серия математ. т. 38, № 2, 333—373 (1974). [2] *М. А. Евграфов*, Аналитические функции, М., 1965. [3] *Uspensky*, Ann. Math. (2), 28 593—619 (1927). [4] *Г. В. Бадалян*, Известия АН Арм. ССР. т. IX, № 1 (1956).