ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 5

УДК 513.838

МАТЕМАТИКА

Л. Г. Пикулева

О сингулярном проективном изгибании вполне фокальных псевдоконгруэнций плоскостей в многомерных проективных пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Александряном 25/V 1974)

1. Пусть L—вполне фокальная псевдоконгруэнция $(m-1)$—плоскостей μ_{m-1} проективного пространства P_n. Присоединим к каждой плоскости $\mu_{m-1} \in L$ подвижной репер, образованный $n+1$ аналитическими точками $A_u(u, v, w=1, \ldots, n+1)$. Инфинитезимальные преобразования вершин репера определяются уравнениями

$$dA_u=\omega_u^v A_v, \tag{1}$$

где ω_u^v—пфаффовы формы, удовлетворяющие уравнениям структуры пространства $P_n: d\omega_u^v=\omega_u^w \wedge \omega_w^v$. Предположим, что все m фокусов плоскости μ_{m-1} линейно независимы. Тогда мы можем совместить точки A_i $(i=1, \ldots, m)$ с фокусами плоскости μ_{m-1}. Точку A_{m+i} расположим на касательной к той из линий m—сопряженной системы (A_i), которая не касается μ_{m-1} (для этой канонизации необходимо считать $n \geq 2m-1$). В таком репере уравнения развертывающихся поверхностей L будут иметь вид: $\omega_i^{m+j}=0$. В силу линейной независимости фокусов формы ω_i^{m+i} тоже независимы. Мы примем их за базисные, введя для них обозначения $\omega_i^{m+i}=\omega^i$.

В таком случае мы будем иметь следующие пфаффовы уравнения:

$$\omega_i^{m+j}=\omega_i^A=0, \quad \omega_i^j=b_i^j\omega^j \quad (j \neq i; \quad i, j=1, \ldots, m) \tag{2}$$

$$\omega_{m+i}^A=a_i^A\omega^i \quad (A=2m+1, \ldots, n+1). \tag{3}$$

2. Предположим, что $n \geq 3m-1$. Из (1) и (3) находим

$$dA_{m+i}=\omega_{m+i}^k A_k+\omega_{m+i}^{m+k}A_{m+k}+\omega^i a_i^A A_A.$$

Ранг матрицы $\| a_i^A \|$ равен m — в противном случае $n<3m-1$. Поэтому точки $a_i^A A_A$ линейно независимы. Поместим вершины A_{2m+i} репера в эти точки: $A_{2m+i}=a_i^A A_A$. Тогда

$$a_i^A = \delta^A_{2m+i}. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) дают

$$\omega^{2m+i}_{m+i} = \omega^i, \quad \omega^\lambda_{m+i} = 0 \quad (\lambda = 3m+1, \ldots, n+1). \tag{5}$$

Продолжение уравнений (2) и (5) дает

$$\begin{gathered}
\omega^j_{m+i} = -a^j_{ii}\omega^i + a^j_{ij}\omega^j, \quad \omega^{m+j}_{m+i} = c^j_i\omega^j, \quad \omega^\lambda_{2m+i} = a^\lambda_{ii}\omega^i, \\
\omega^i_i - 2\omega^{m+i}_{m+i} + \omega^{2m+i}_{2m+i} = a^{2m+i}_{ii}\omega^i, \quad \omega^{2m+j}_{2m+i} = -c^j_i\omega^j + a^{2m+j}_{ii}\omega^i \\
db^j_i + b^j_i(2\omega^j_j - \omega^i_i - \omega^{m+j}_{m+j}) - \sum_{k \neq i,j} b^k_i b^j_k \omega^k = a^j_{ii}\omega^i + b^j_{ij}\omega^j, \\
dc^j_i + c^j_i(\omega^i_i - 2\omega^{m+i}_{m+i} + \omega^{m+j}_{m+j}) + \omega^{m+j}_{2m+i} = c^j_{ii}\omega^i + a^j_{ii}\omega^j, \quad j \neq i.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем по малым латинским индексам i, j, k суммирование производится лишь в том случае, если стоит знак суммы.

3. Пусть задана другая псевдоконгруэнция $\overline{L}$, принадлежащая пространству $\overline{P}_n$. Все выражения, относящиеся к $\overline{L}$, мы будем обозначать чертой сверху. Пусть репер, присоединенный к $\overline{L}$, специализирован так же, как и репер, связанный с L. Тогда имеют место уравнения $(\overline{1})$, $(\overline{2})$, $(\overline{5})$, $(\overline{6})$.

Пусть между плоскостями L и $\overline{L}$ установлено взаимно однозначное соответствие $c: L \to \overline{L}$. Это соответствие называется проективным изгибанием второго порядка, если для каждой плоскости $\mu_{m-1} \in L$ существует коллинеация $K: P_n \to \overline{P}_n$ такая, что

$$\begin{gathered}
K|A_1 \ldots A_m| = |\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_m|, \\
Kd|A_1 \ldots A_m| = d|\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_m| + \Theta_1|\overline{A}_1 \ldots \overline{A}|, \\
Kd^2|A_1 \ldots A_m| = d^2|A_1 \ldots A_m| + 2\Theta_1|A \ldots A_m| + \Theta|A \ldots A_m|.
\end{gathered} \tag{7}$$

В роботе [1] установлено, что соответствие c может быть задано уравнениями

$$\omega^i = \overline{\omega}^i,$$

продолжение которых имеет вид

$$\tau^{m+i}_{m+i} - \tau^i_i = t^i\omega^i,$$

где $\tau^v_u = \omega^v_u - \omega^v_u$.

Коллинеация K, реализующая проективное изгибание второго порядка, определяется формулами (см. [1]):

$$\begin{cases}
KA_i = \rho_i\overline{A}_i, \quad KA_{m+i} = \alpha^i_{m+i}\overline{A}_i + \rho_i\overline{A}_{m+i}, \\
KA_{2m+i} = \sum\limits_k (\alpha^k_{2m+i}\overline{A}_k + \alpha^{m+k}_{2m+i} \cdot \overline{A}_{m+k}) + \rho_i\overline{A}_{2m+i}, \\
KA_\lambda = \alpha^u_\lambda\overline{A}_u, \quad \lambda = 3m+1, \ldots, n+1.
\end{cases}$$

причем

$$\rho_1 \cdot \cdot \cdot \rho_m = 1, \quad \rho_i c_i^k - \rho_k c_i^k = a^{m+k}_{2m+i},$$

$$a^{m+i}_{2m+i} - 2a^i_{m+i} = \rho_i t^i, \quad b^k_i \rho_k = b^k_i \rho_i. \tag{9}$$

4. Соответствие $c: L \to \bar{L}$ индуцирует соответствия $c_i: (A_i) \to (\bar{A}_i)$ фокальных поверхностей L и $\bar{L}$. *Назовем проективное изгибание второго порядка $c: L \to \bar{L}$, реализуемое коллинеацией K, слабо сингулярным (сингулярным) i-го рода, i фиксировано, если индуцированное им соответствие c_i будет проективным изгибанием первого (второго) порядка, реализуемым той же самой коллинеацией K.*

Если указанное свойство выполняется при любом i, то изгибание c называется слабо сингулярным (сингулярным).

Теорема 1. *Проективное изгибание второго порядка $c: L \to \bar{L}$ слабо сингулярно.*

В самом деле, из (1), $(\bar{1})$, (2), $(\bar{2})$ находим, что

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \sum_k b_i^k \omega^k A_k + \omega^i A_{m+i}. \tag{10}$$

Из (10), $(\overline{10})$ и (18) с учетом (9) находим, что

$$KA_i = \rho_i \bar{A}_i, \quad KdA_i = \rho_i d\bar{A}_i + \theta_i \bar{A}_i, \tag{11}$$

где

$$\theta_i = -\rho_i t_i^i + \omega^i a^i_{m+i}.$$

Равенства (11) означают, что коллинеация K, реализующая проективное изгибание второго порядка L и $\bar{L}$, реализует проективное изгибание первого порядка любой пары фокальных поверхностей (A_i) и $(\bar{A}_i)$. Таким образом, проективное изгибание второго порядка $c: L \to \bar{L}$ слабо сингулярно.

5. Найдем теперь условия сингулярности проективного изгибания второго порядка.

Для того, чтобы соответствие $c_i: (A_i) \to (\bar{A}_i)$ было проективным изгибанием второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (11) и

$$Kd^2A_i = d\bar{A}_i + 2\theta_i d\bar{A}_i + \bar{\theta}_i \bar{A}_i, \tag{13}$$

где θ_i определяется из (12), а $\bar{\theta}_i$—некоторая форма.

Из (10), (5) и (8) находим:

$$d^2A_i = (\cdot \cdot \cdot)A_i + \sum_{k \neq i} [\omega^k [2a^k_{ik}\omega^i + b^k_{ik}\omega^k - b^k_i(\omega^k_k - \omega^{m+k}_{m+k} - 2\omega^i_i) +$$

$$+ \sum_{l \neq i,k} b^l_i b^k_l \omega^l] + b^k_i d\omega^k - a^k_{ii}(\omega^i)^2] A_k + [d\omega^i + \omega^i(\omega^i_i + \omega^{m+i}_{m+i})] A_{m+i} +$$

$$+ \sum_{k \neq i} [b^k_i(\omega^k)^2 + c^k_i(\omega^i)^2] A_{m+k} + (\omega^i)^2 A_{2m+i}$$

Подставим (14) и $(\overline{14})$ в (13) и используем (8). В полученном равенстве коэффициенты при $\bar{A}_{2m+i}$, $\bar{A}_{m+i}$, $\bar{A}_{m+k}$ $(k \neq i)$ будут тождественно равны нулю в силу (9), приравнивание нулю коэффициента при $\bar{A}_i$ дает возможность определить форму $\bar{\theta}_i$, наконец, приравнивание нулю коэффициента при $\bar{A}_k$ даст

$$\alpha^k_{2m+i} = a^k_{ii}\rho_k - a^k_{ik}\rho_i - c^k_i\alpha^k_{m+k} = 0, \quad k \neq i, \tag{15}$$

$$\bar{b}^k_{ik}\rho_i - b^k_{ik}\rho_k + b^k_i\rho_k t^k - b^k_i\alpha^k_{m+k} = 0, \quad k \neq i, \tag{16}$$

$$a^k_{ik}\rho_i - a^k_{ik}\rho_k + b^k_i\alpha^i_{m+i} = 0, \qquad k \neq i.$$

Равенства (15) дают возможность определить коэффициенты α^k_{2m+i}, т. е. показывают, что наиболее общая коллинеация K, реализующая проективное изгибание второго порядка псевдоконгруэнций L и $\bar{L}$ не реализует сингулярного изгибания i-го рода.

Соотношения же (16), как легко видеть, есть дифференциальные следствия равенств $b^k_i\rho_k = \bar{b}^k_i\rho_i$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того, чтобы проективное изгибание второго порядка* $c: L \to \bar{L}$ *было сингулярным* i*-го рода (сингулярным), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты* α^k_{2m+i} *при фиксированном* i *(при любом* i*) коллинеации* K*, реализующей изгибание* c*, определялись по формулам* (15).

6. Преобразованием Лапласа псевдоконгруэнций L в направлении ω^i, соответствующем направлению ω^k $(k \neq i)$, будет псевдоконгруэнция L^k_i, описываемая плоскостями (см. [2])

$$(\mu_{m-1})^k_i = [A_1 \ldots A_{k-1}A_{k+1} \ldots A_m A_{m+i}].$$

С помощью (8) находим, что

$$K[A_1 \ldots A_{k-1}A_{k+1} \ldots A_m A_{m+i}] = [\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{k-1}\bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_m\bar{A}_{m+i}]. \tag{17}$$

Равенства (8), (9), (15), (16) позволят доказать, что

$$Kd[A_1 \ldots A_{k-1}A_{k+1} \ldots A_m A_{m+i}] = \frac{\rho_i}{\rho_k}[\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{k-1}\bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_m\bar{A}_{m+i}] +$$

$$+ \varphi_i[\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_{k-1}\bar{A}_{k+1} \ldots \bar{A}_m\bar{A}_{m+i}]. \tag{18}$$

Заметим, что из (18) вытекает (15). Выполнение соотношений (17) и (18) означает, что псевдоконгруэнции L^k_i и $\bar{L}^k_i$ проективно наложимы с порядком наложения один. Доказана

Теорема 3. *Для того, чтобы проективное изгибание второго порядка* $c: L \to \bar{L}$ *было сингулярным* i*-го рода (сингулярным), необходимо и достаточно, чтобы индуцированные им соответствия*

$c_i^k: L_i^k \to \overline{L}_i^k$ при фиксированном l и всех $k \neq l$ (при любых l, $k \neq l$) были проективными изгибаниями первого порядка.

Отметим, что сингулярное проективное изгибание второго порядка $c: L \to \overline{L}$ не влечет проективного изгибания второго порядка преобразований Лапласа L_i^k и $\overline{L_i^k}$.

7. Пусть теперь $n < 3m - 1$, $n = 2m - 1 + \sigma$, $\sigma = 0, 1, \dots, m-1$. В этом случае среди точек $a_i^A A_A$ линейно независимых будет σ. Совместим с ними точки A_{2m+r}, $r = 1, \dots, \sigma$. Тогда $a_i^A A_A = \mu_i^{2m+r} A_{2m+r}$, т. е.

$$\mu_i^{2m+r} = a_i^{2m+r}, \quad a_i^{2m+\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = \sigma + 1, \dots, n + 1 - 2m)$$

В этом случае, если $c: L \to \overline{L}$ — проективное изгибание второго порядка, то $\overline{L} \subset \overline{P}_{2m-1+\sigma}$. Коллинеация K, реализующая такое изгибание, имеет вид:

$$KA_l = \rho_l A_l, \quad KA_{m+l} = \alpha^l_{m+l} A_l + \rho_l A_{m+l}, \tag{19}$$

$$KA_{2m+r} = \sum_k (\alpha^k_{2m+r} A_k + \alpha^{m+k}_{2m+r} A_{m+k}) + \sum_{t=1}^{\sigma} \alpha^{2m+t}_{2m+r} A_{2m+t},$$

причем

$$\rho_1 \dots \rho_m = 1, \quad b_i^k \rho_k = b_i^k \rho_l, \quad \rho_l c_i^k - \rho_k c_i^k = \sum_{r=1}^{\sigma} a_i^{2m+r} \alpha^{m+k}_{2m+r}, \tag{20}$$

$$\rho_l t^l = \sum_{\tau=1}^{\sigma} a_i^{2m+\tau} \alpha^{m+l}_{2m+\tau} - 2\alpha^l_{m+l}.$$

С помощью равенств (19) и (20) можно доказать теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, 3. При этом вместо соотношений (15) будем иметь

$$a_i^{2m+\tau} \alpha^k_{2m+\tau} = a^k_{il} \rho_k - a^k_{lk} \rho_l - c_i^k \alpha^k_{m+k}. \tag{21}$$

Здесь возникает вопрос о совместности уравнений (20) и (21). Совместность уравнений (20) следует из результатов работы ([2]), где доказана теорема существования псевдоконгруэнции с заданным проективным линейным элементом в пространстве $P_{m\sigma-1+\sigma}$, сохранение которого необходимо и достаточно для проективного изгибания второго порядка L и $\overline{L}$. В нашем случае условия (20) дают равенство проективных линейных элементов L и $\overline{L}$.

Что касается условий (21), то в них содержится $m(m-1)$ уравнений с σm неизвестными $\alpha^k_{2m+\tau}$. При $\sigma = 0$ они дадут соотношения, являющиеся дифференциальными следствиями (20). При $\sigma = m - 1$ число уравнений будет равно числу неизвестных, и вообще говоря, в этом случае система (21) позволит определить $\alpha^k_{2m+\tau}$, не дав никаких условий совместности.

При $0 < \sigma < m - 1$ в системе (21) число уравнений будет больше числа неизвестных $\alpha^k_{2m+\tau}$ и она, вообще говоря, несовместна.

Поэтому теоремы 2 и 3 верны лишь при $\sigma=0$ и $\sigma=m-1$.

В заключение отметим, что сингулярное проективное изгибание псевдоконгруэнций прямых в пространстве P_3 изучалось в ([4]), а в P_4 — в ([5,6]). Это соответствует разобранному нами в п. 7 случаю $n<3m-1$, $n=2m-1+\sigma$, причем $m=2$, а $\sigma=0$ для P_3 и $\sigma=1$ для P_4, т. е. как раз двум возможным случаям совместности системы (21), о которых только что говорилось.

Всесоюзный заочный
финансово-экономический институт

Լ. Գ. ՊԻԿՈՒԼԵՎԱ

Բազմաչափ պրոյեկտիվ տարածություններում հարթությունների լիովին ֆոկալ պսևդոկոնգրուենցիաների սինգուլյար պրոյեկտիվ ծռման մասին

P_n և $\bar{P}_n$ տարածությունների հարթությունների L և $\bar{L}$ պսևդոկոնգրուենցիաների երկրորդ կարգի պրոյեկտիվ ծռումը կոչվում է թույլ սինգուլյար կամ սինգուլյար, եթե այդպիսի ծռումն իրականացնող կոլինեացիան միաժամանակ առաջացնում է L և $\bar{L}$ ֆոկալ մակերևույթների առաջին կամ երկրորդ կարգի պրոյեկտիվ ծռում։

Ապացուցված է, որ երկրորդ կարգի պրոյեկտիվ ծռումը միշտ թույլ սինգուլյար է և գտնված են նրա սինգուլյար լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ $n>3m-1$ և $2m-1\leqslant n\leqslant 3m-1$ դեպքերի համար ուսումնասիրությունը կատարվում է առանձին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Г. Пикулева*, Ученые записки Калининского гос. пед. ин-та, т. 74, стр. 111—123. [2] *Л. Г. Пикулева*, ДАН Арм. ССР, т. L, № 2, (1970). [3] *Л. Г. Пикулева*. Труды объединения матем. кафедр. Центр. зоны РСФСР, вып. 3, «Геометрия», Тамбов, стр. 149—171, 1971. [4] *A. Švec*, Projective differential geometry of line congruences, Prague, 1965. [5] *J. Krejzlik*, Sb. Vojen. akad. A. Zápotochého, B. 17, № 1, 49—61(1969). [6] *J. B[...]*. Sb. Vojen. akad. A. Zapotochého, B. 18, № 1, 47—58 (1970).