

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Е. Маркосян

Совершенные и критические графы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 24/III 1975)

Граф $G = (X, U)$ называется совершенным, если для каждого подграфа G' графа G хроматическое число $\chi(G')$ равно плотности $\varphi(G) : \chi(G) = \varphi(G')$.

Следуя Олару ⁽¹⁾ кликоматическим числом $\sigma(G)$ графа G назовем минимальное число полных подграфов, с помощью которых можно покрыть все вершины графа G . Пусть $\alpha(G)$ — число внешней устойчивости графа G . Очевидно $\sigma(G) \geq \alpha(G)$ для произвольного графа. Скажем, граф G имеет α -покрытие, если $\sigma(G) = \alpha(G)$.

Нечетной дыркой в графе G назовем нечетный цикл без диагоналей. Относительно совершенных графов Берж ⁽²⁾ выдвинул следующие две гипотезы:

первая гипотеза — Дополнение совершенного графа совершенный граф, вторая (сильная) гипотеза — Если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то он совершенный.

Ловас ⁽³⁾ получил результат, из которого непосредственно следует вторая гипотеза, а именно:

граф $G = (X, U)$ является совершенным тогда и только тогда, когда для любого подграфа $G' = (X', U')$ графа G , $\alpha(G') \cdot \varphi(G') \geq |X'|$.

Вторая гипотеза пока еще не решена. Так как условие этой гипотезы: не содержание нечетных дырок, — наследственное свойство (свойство называется наследственным, если из того, что граф имеет данное свойство следует, что любой подграф имеет данное свойство), то очевидно сильная гипотеза равносильна следующей:

Если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то он имеет α -покрытие.

Класс совершенных графов является подклассом класса графов, имеющих α -покрытие, и второй класс существенно шире. Ниже определим несколько понятий, с помощью которых будем изучать графы, не имеющие нечетных дырок, совершенные и критические графы и графы, имеющие α -покрытие.

Ребро $u = (x, y)$ в графе $G = (X, U)$ назовем критическим, если $\alpha(G \setminus u) > \alpha(G)$. Пусть граф G имеет α -покрытие, тогда ребро u назовем существенным, если при любом α -покрытии ребро u принадлежит какому-нибудь полному подграфу.

Если граф имеет α -покрытие, то тогда критическое ребро в то же время является существенным, но обратное неверно. Последнее легко проверить на пятиугольнике с одной диагональю. Диагональ будет существенным, но не критическим ребром. Произвольный граф G назовем критическим, если любое ребро этого графа критическое. Например, пятиугольник или полный граф являются критическим.

Возьмем произвольный граф $G = (X, U)$ и с помощью только критических ребер составим компоненты связности $G_1 = (X_1, U_1)$, $G_2 = (X_2, U_2)$, $\dots$, $G_k = (X_k, U_k)$ суграфа $G' = (X', U')$, где U' множество критических ребер графа G . Подграфы $G_1 = (X_1, U_1)$, $G_2 = (X_2, U_2)$, $\dots$, $G_k = (X_k, U_k)$ — графа G назовем критическими компонентами. В графе G не все ребра критической компоненты могут быть критическими. Возьмем как пример опять пятиугольник с одной диагональю. Треугольник будет одной критической компонентой, но диагональ не будет критическим ребром.

Произвольный граф разбивается на критические компоненты.

Может случиться так, что каждая компонента будет состоять из одной вершины (если граф не имеет критических ребер), например, простой цикл четной длины. Интересен тот факт, что граф может не иметь критических ребер, но иметь существенные ребра.

Построим такой пример. Для этого воспользуемся тем, что существуют графы с данной плотностью и с данным хроматическим числом. Когда $\varphi(G) = 2$, $\chi(G) = 4$ таким графом является граф Мицельского. Кроме того, этот граф обладает следующим свойством: при добавлении любого ребра плотность увеличивается (возникают треугольники). Возьмем по одному экземпляру графов Мицельского и полного пятивершинника, добавим две вершины x и y . Соединим вершины x и y со всеми вершинами графа Мицельского (рис. 1). Хроматическое число полученного графа равно пяти и добавление любого ребра плотность не увеличивает. При любой минимальной раскраске вершины x и y раскрашиваются одним цветом.

Дополнение полученного графа (рис. 2) будет тем примером, который мы хотели построить. Ребро $u = (x, y)$ будет существенным.

Особый интерес представляют критические графы, когда $\alpha(G) = \alpha(G)$, $\alpha(G) = \alpha(G) + 1$, в связи с изучением совершенных графов.

Ниже опишем процедуру, которая в некоторой степени выявляет структуру графов, имеющих α -покрытие.

Пусть граф G имеет α -покрытие. Тогда критические компоненты $G_1, G_2, \dots, G_k$ графа G должны быть полными, так как критическое ребро одновременно является и существенным. Если две критические компоненты G_l и G_m , $l \neq m$, $l, m \leq k$, содержат соответственно такие две вершины x_l и x_m , которые в графе G не смежны, то

очевидно множество ребер, соединяющих вершины G_l и G_m можно удалить из графа, при этом не нарушится наличие α -покрытия.

Действительно, При любом α -покрытии все вершины одной критической компоненты должны принадлежать одному и тому же полному подграфу α -покрытия. Полные подграфы, содержащие G_l и G_m , не могут совпадать, так как вершины x и y не смежны. Значит ребра, соединяющие вершины G_l с вершинами G_m , не могут принадлежать никакому полному подграфу при любом α -покрытии и все такие ребра можно удалить из графа G не нарушая наличия α -покрытия. Полученный граф обозначим через G' . Так как G' имеет α -покрытие, то опять можно выбрать две критические компоненты графа G' , G'_l , G'_m , которые содержат несмежные вершины x'_l и x'_m и удалить все ребра между этими компонентами, получим граф G^2 и т. д.

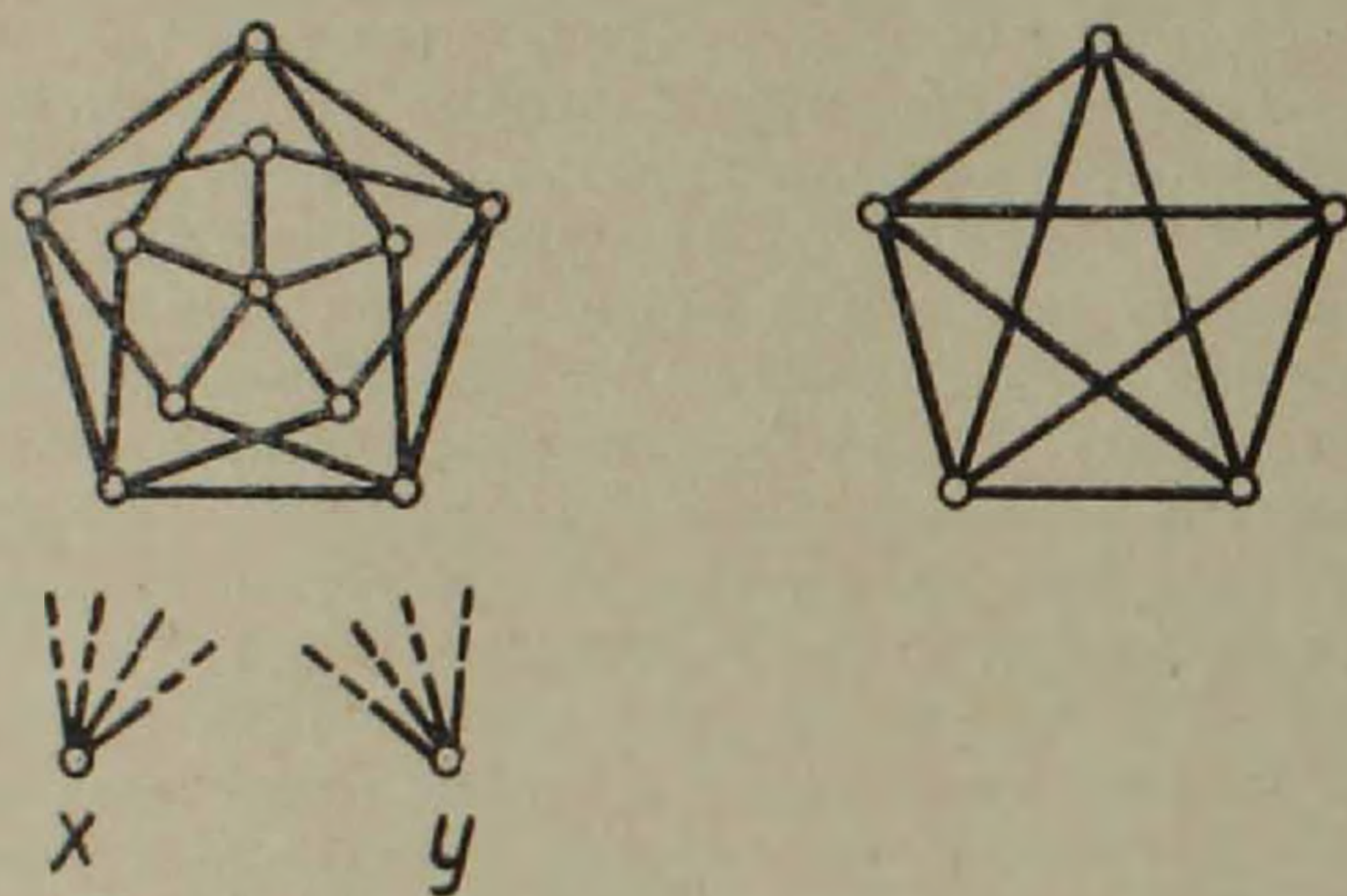


Рис. 1

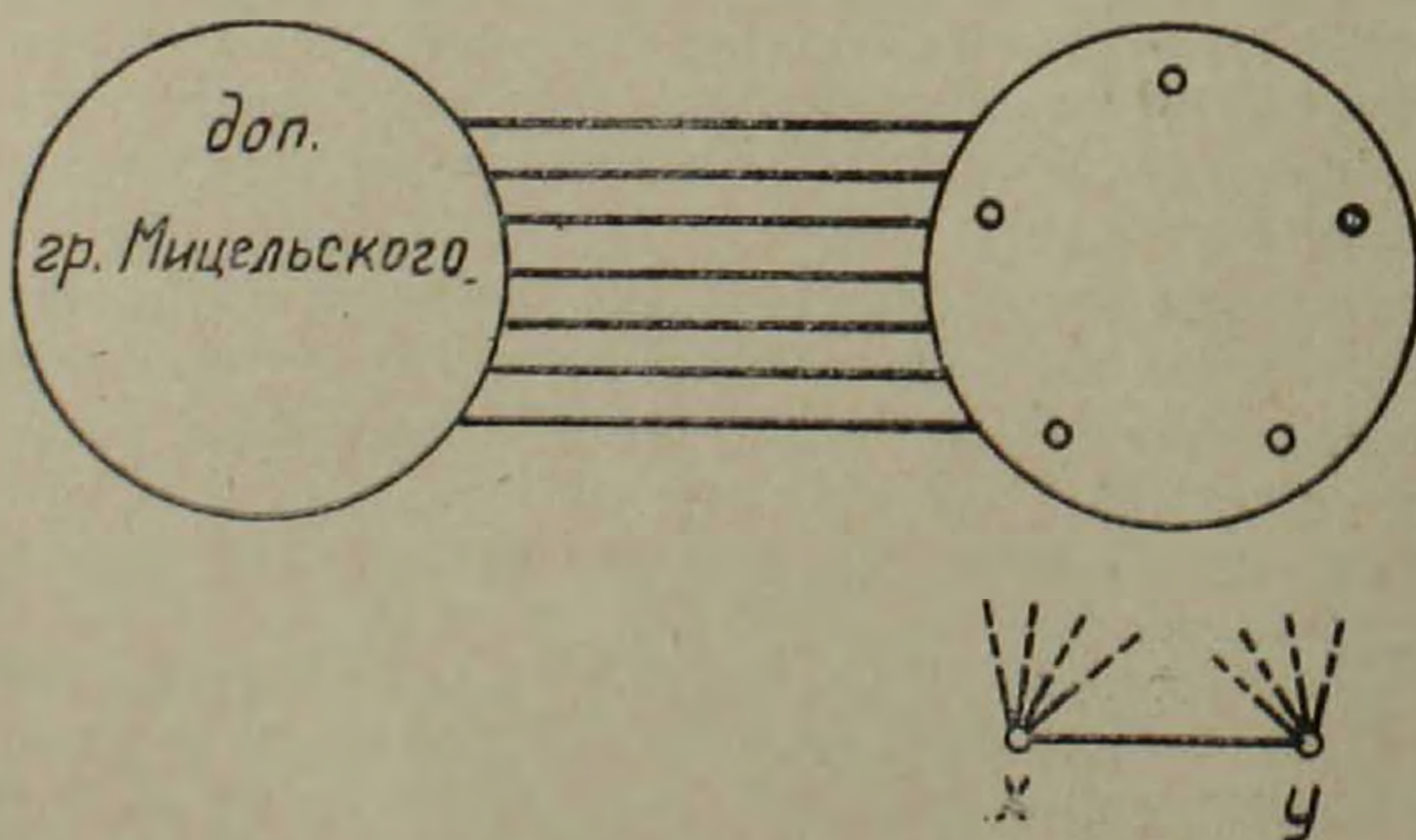


Рис. 2

Описанный процесс повторяем до тех пор, пока не получим такой граф G^s , в котором любые две вершины x_l^s и x_m^s , соответствующих компонент G_l^s и G_m^s , $l \neq m$, $l, m = 1, 2, \dots$ смежны или никакие две вершины из этих компонент не смежны. Итак, граф G^s получается из исходного графа G с помощью повторений следующих двух шагов.

1°. Составление критических компонент и переход к 2°, если еще не получен граф G^s .

2°. Удаление множества ребер между двумя компонентами, которые вместе не составляют полный подграф и переход к 1°. Вместо графа G^s , можно рассмотреть граф $G_{пр}$, вершинами которого являются критические компоненты графа G^s , и две вершины G_l^s, G_m^s смежны в $G_{пр}$, если они смежны в графе G^s . Граф $G_{пр}$ назовем приведенным графом графа G .

Теперь легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Если критические компоненты в G^s полные, то граф G имеет α -покрытие тогда и только тогда, когда граф $G_{пр}$ имеет α -покрытие.*

Теорема 1 показывает, что при изучении графов, имеющих α -покрытие, можно ограничиться приведенными графами. В связи с этим интересен следующий вопрос: содержит ли приведенный граф существенные дуги?

При отрицательном ответе можно предложить 3° шаг вышеописанного процесса.

3°. В приведенном графе $G_{пр}$ выбрать произвольное ребро и удалить его, после чего перейти к 1°.

К сожалению, можно привести пример приведенного графа, который содержит существенное ребро. Граф, изображенный на рис. 2 приведенный и $u = (x, y)$ —единственное существенное ребро. Несмотря на положительный ответ на данный вопрос для графов, имеющих α -покрытие, кажется верным следующее утверждение. Приведенные графы совершенных графов не содержат существенных дуг. Было бы интересно выяснить этот вопрос. Из правильности сильной гипотезы Бержа непосредственно следует: если граф и его дополнение не содержат нечетных дырок, то его критические компоненты являются полными подграфами.

Очевидно, что последнее утверждение является более слабой гипотезой, чем сильная гипотеза и вполне естественно сначала попробовать решить эту «слабую» гипотезу. Пока удалось доказать правильность этой гипотезы для частного случая.

Теорема 2. *Пусть граф G не содержит нечетных дырок. Если два различных ребра $u = (x, y)$ и $v = (y, z)$ критические, то в графе G существует ребро $w = (x, z)$.*

Для доказательства этой теоремы, докажем одну простую лемму.

Пусть в произвольном графе L имеем два наибольших внутренних устойчивых множества S и T . Рассмотрим подграф L_{ST} , порожденный множеством вершин S и T . Обозначим компоненты связности подграфа L_{ST} через $L_{ST}^1, L_{ST}^2, \dots$.

Лемма. В любой компоненте $L_{ST}^i, i=1, 2, \dots$ число вершин, принадлежащих множеству S и множеству T , равно:

$$|L_{ST}^i \cap S| = |L_{ST}^i \cap T|, \quad i=1, 2, \dots$$

Доказательство леммы. Если в некоторой i -ой компоненте $|L_{ST}^i \cap S| > |L_{ST}^i \cap T|$, то образовав множество

$$T' = (T \setminus (L_{ST}^i \cap T)) \cup (L_{ST}^i \cap S),$$

мы получим новое внутренне устойчивое множество, число вершин которого больше $\alpha(L)$, лемма доказана.

Доказательство теоремы. Так как ребро uv критическое, то после его удаления в графе G возникает внутренне устойчивое множество с $\alpha(G) + 1$ элементами, содержащее вершины x и y . Это означает, что в графе G существует S_u внутренне устойчивое множество с $\alpha(G) - 1$ элементами, которые вместе с вершинами x или y образуют внутренне устойчивое множество с $\alpha(G)$ элементами. Точно также существует внутренне устойчивое множество S_v .

Обозначим через

$$S_x = |x| \cup S_u, \quad S_z = |z| \cup S_v.$$

Пусть G_{xz} подграф графа G , порожденный множеством вершин $S_{xz} = S_x \cup S_z$, а G_{xz}^1 и G_{xz}^2 компоненты связности этого подграфа, содержащие соответственно вершины x и z .

Покажем, что компоненты G_{xz}^1 и G_{xz}^2 совпадают.

Если G_{xz}^1 и G_{xz}^2 не пересекаются, то в силу доказанной леммы

$$|G_{xz}^1 \cap S_x| = |G_{xz}^1 \cap S_z|, \quad i=1, 2, \dots$$

Рассмотрим множество

$$S_v = (S_z \cap G_{xz}^1) \cup (S_x \cap G_{xz}^2) \cup |y|.$$

Оно внутренне устойчиво и содержит $\alpha(G) + 1$ элементов. Значит G_{xz}^1 и G_{xz}^2 совпадают, т. е. вершины x и z принадлежат одной и той же компоненте. В подграфе G_{xz} возьмем кратчайшую цепь $P(x, z)$, соединяющую вершины x и z . Легко убедиться, что $P(x, z)$ вместе с ребрами uv и vw составляет простой нечетный цикл и в графе G этот цикл не имеет диагоналей. Так как граф G не содержит нечетных дырок, то отсюда следует, что $P(x, z)$ представляет собой одно ребро $P(x, z) = (x, z) = w$.

Теорема доказана.

Цепь назовем критической, если все ребра критические.

Следствие 1. Слабая гипотеза верна, если в каждой критической компоненте графа G между любыми двумя вершинами существует критическая цепь длины не больше двух.

Следствие 2. Критический связный граф, не содержащий нечетных дырок, является полным. Если критический граф не связный, то он является объединением полных графов.

Следствие 3. Если связный критический граф имеет 1-покрытие, то он полный.

Все следствия непосредственно вытекают из теоремы 2.

Если связный критический граф совершенный, то из следствия 1 вытекает, что он полный. Следствия 2 и 3 описывают критические графы, когда они не содержат нечетных дырок они имеют 1-покрытие.

Ереванский научно-исследовательский институт
математических машин

И. Б. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Կատարյալ և կրիտիկական գրաֆներ

Հոդվածում տրված է կրիտիկական գրաֆի գաղափարը և նրա օգնությամբ ուսումնասիրված է կատարյալ գրաֆների որոշ հատկությունները նկարագրված է կրիտիկական գրաֆների դասը 1—ծածկույթ ունեցող գրաֆների համարը Գտնված է անհրաժեշտ և բավարար պայման 1—ծածկույթի գոյության համար բերված գրաֆների օգնությամբ, Զնակերկված է Բերդի ուժեղ հիպոթեզից բխող հետևյալ պնդումը՝ Եթե գրաֆը և նրա լրացումը չեն պարունակում կենտ ցիկլեր առանց անկյունագծերի, ապա նրանց կրիտիկական կոմպոնենտները լրիվ են, Լիպացուցված է հետևյալ փաստը՝ Եթե կրիտիկական կոմպոնենտի մեջ կամայական ճրկու գագաթների միջև գոյություն ունի 2 երկարությամբ կրիտիկական շղթա, ապա այդ կոմպոնենտը լրիվ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԻՐԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ E. Oloru. An. st. Univ. Iasi, Sec Ia 19, № 2, 1973. ² C. Berg. Recent progress in Combinatorics Academic Press, New-York, 1969. ³ L. A. Lovasz I. Comb. Theory, v. 13, № 2 (1972).