ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 4

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

И. С. Кац

О неполноте системы собственных функций обобщенного линейного дифференциального выражения второго порядка

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 1/III 1975)

1. Пусть на интервале $I=(a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ заданы неубывающая функция $M(x)$ и функция $Q(x)$ — разность двух неубывающих. Обозначим через $D=D_{MQ}$ множество функций $f(x)$ $(a<x<b)$ таких, что 1) $f(x)$ абсолютно непрерывна на $I=(a, b)$, 2) в каждой точке $x \in (a, b)$ существует правая производная $f^{+}(x)$, 3) функция

$$f^{(+)}(x)=f^{+}(x)-\int\limits_{k+0}^{x+0} f(s)dQ(s) \qquad (a<x<b), \tag{1}$$

где $k \in I$ — фиксированная точка, M — абсолютно непрерывна. Для $f(x) \in D_{MQ}$ при M — почти всех $x \in I$ имеет смысл дифференциальное выражение

$$l_{MQ}[f]=l_{MQ}[f](x)=-\frac{d}{dM(x)}f^{(+)}(x), \tag{2}$$

где производная по отношению к $M(x)$ понимается как симметричная производная.* Для дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ левый (правый) конец интервала I называют *регулярным*, если ограничены снизу (сверху) множество F_M точек роста функции $M(x)$ и множество ее значений, а $Q(x)$ имеет ограниченное изменение в правой (левой) окрестности точки $a_0=\inf F_M$ $(b_0=\sup F_M)$. В противном случае этот конец называют *сингулярным*.

* В нашей работе ((1), § 7) дифференциальное выражение $l_{MQ}[\cdot]$ вводилось и в случаях, когда $I=[a, b)$, $I=[a, b]$, $I=(a, b]$, где включение $a \in I$ $(b \in I)$ допускалось лишь при $a>-\infty$ $(b<+\infty)$. В этих случаях $l_{MQ}[\cdot]$ рассматривалось на „продленных функциях" (в случае, когда $Q(x)=\text{const}$, см. (2)). Однако уже в (1) приводилось построение, приводившее все эти случаи к рассматриваемому здесь случаю с $I=(a, b)$ ((1) стр. 216, 182—183). Впервые дифференциальное выражение $l_{MQ}[\cdot]$ было введено в нашей работе (3).

Функцию $u(x)$ считаем решением дифференциального уравнения $l_{MQ}[y] = \varphi(x)$ $(a < x < b)$, если $u(x) \in D_{MQ}$ и равенство $l_{MQ}[u](x) = \varphi(x)$ имеет место M-почти всюду на (a, b). Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение

$$l_{MQ}[y] - \lambda y = 0 \quad (a < x < b) \tag{3}$$

с параметром λ в том частном случае, когда $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывны, равносильно нагруженному уравнению Штурма—Лиувилля

$$-y'' + q(x)y - \lambda\rho(x)y = 0 \quad (a<x<b), \tag{4}$$

где $\rho(x) = M'(x)(\geqslant 0)$, $q(x) = Q'(x)$ почти всюду на I.

Обобщенное дифференциальное уравнение (3) обладает многими свойствами, аналогичными свойствам уравнения (4) ([1], стр. 216, §2). В частности, задача Коши с уравнением (3) и условиями: $y^-(c) = m$, $y(c) = n$ — для любой фиксированной точки $c \in I$ и любых фиксированных комплексных λ, m, n имеет решение, причем единственное ($-$ — символ левой производной по переменной x).

Дифференциальное выражение $l[\cdot] = l_{MQ}[\cdot]$ формально самосопряженно по отношению к M-мере, т. е. для любых α, $\beta \in I$ и $f(x)$, $g(x) \in D$ имеет место „тождество Лагранжа"

$$\int\limits_{\alpha+0}^{\beta+0} \left(l[f](x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{l[g](x)}\right) dM(x) = \left[f(x)\overline{g^+(x)} - f^+(x)\overline{g(x)} \right]\Big|_{\alpha}^{\beta}. \tag{5}$$

2. Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство $L_M^{(2)}(I)$ M — измеримых функций, имеющих M — суммируемый квадрат. Точнее говоря, элемент $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ — это семейство „изображающих этот элемент" функций $f(x) \in L_M^{(2)}(I)$, попарно совпадающих M-почти всюду на I; для них мы пишем $f(x) \in \mathbf{f}$. Говоря, что $f(x)$ принадлежит множеству $\mathbf{V}$, где $V \subseteq \mathbf{H}$, или записывая „$f(x) \in V$", подразумеваем, что существует изображаемый функцией $f(x)$ элемент $\mathbf{f} \in V$. Через $\mathbf{H}^{\cdot}$ обозначаем множество $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ таких, что существует $f(x) \in \mathbf{f}$, равная нулю в окрестностях сингулярных концов интервала I (если оба конца регулярны, $\mathbf{H}^{\cdot} = \mathbf{H}$).

Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathbf{H}$ разложима по собственным функциям дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$, если существует неубывающая функция $\sigma_f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ и функция $v_f(x, \lambda)$ $(x \in I,\ -\infty < \lambda < +\infty)$, которая при любом фиксированном λ является собственной функцией этого выражения, т. е. решением уравнения (3), а при любом фиксированном $x \in I$ B — измерима и локально ограничена, такие, что

$$f(x) = \lim_{\substack{\mu \to -\infty \\ \nu \to +\infty}} \int\limits_{\mu-0}^{\nu-0} v_f(x, \lambda)\, d\sigma_f(\lambda), \tag{6}$$

где интеграл как функция переменной x при любых $\mu, \nu \in (-\infty, +\infty)$ принадлежит $\mathbf{H}$, а предел понимается в смысле метрики пространства $\mathbf{H}$. Будем говорить, что система собственных функций дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ полна в пространстве $\mathbf{H}$, если любая функция $f(x) \in \mathbf{H}$ разложима по его собственным функциям.

Зафиксируем некоторую точку $c \in I$. Обозначим через $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ решения уравнения (3) такие, что $u_1(c, \lambda) = u_2^-(c, \lambda) = 1$, $u_1^-(c, \lambda) = u_2(c, \lambda) = 0$.

Эрмитово-неубывающую матрицу матрицу-функцию $S(\lambda) = (\sigma_{ij}(\lambda))_{ij=1}^{2}$ $(-\infty < \lambda < +\infty;\ S(\lambda) = \frac{1}{2}(S(\lambda - 0) + S(\lambda + 0), S(0) = 0)$ называют спектральной матрицей-функцией дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$, соответствующей точке $x = c$, если отображение $U: \mathfrak{f} \to F(\lambda)$, где $\mathfrak{f} \in \mathbf{H}''$, а $F(\lambda)$ — вектор-функция $(F_1(\lambda), F_2(\lambda))$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$, определяемая равенствами

$$F_j(\lambda) = \int_I f(x) v_j(x, \lambda) dM(x) \qquad (j = 1, 2;\ f(x) \in \mathfrak{f}), \tag{7}$$

изометрически переводит $\mathbf{H}''$ в гильбертово пространство $L_S^{(2)}(-\infty, +\infty)$*. Спектральная матрица-функция $S(\lambda)$ называется ортогональной, если $U\mathbf{H} = L_S^{(2)}(-\infty, +\infty)$*.

Наличие соответствующей точке $c \in I$ спектральной матрицы-функции дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ влечет за собой полноту в $\mathbf{H}$ системы его собственных функций.

3. В том частном случае, когда функции $M(x)$ и $Q(x)$ абсолютно непрерывны и $M'(x) > 0$ п. в. на I (т. е., когда уравнение (3) эквивалентно уравнению (4) с вещественными локально суммируемыми $\rho(x) > 0$ и $q(x)$, как хорошо известно, для любой точки $c \in I$ существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная спектральная матрица-функция и, следовательно, система собственых функций полна в $\mathbf{H}$. Как оказалось, в общем случае нельзя утверждать полноту в $\mathbf{H}$ системы собственных функций дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$.

Если $[\alpha, \beta] \subset I$, то через $h_{\alpha\beta}(x)$ $(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ обозначаем функцию, которая абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$, имеет в каждой точке $x \in [\alpha, \beta)$ правую производную $h_{\alpha\beta}^+(x)$ и такую, что $h_{\alpha\beta}(\alpha) = 0$,

$$h_{\alpha\beta}^+(x) - \int_{\alpha+0}^{x+0} h_{\alpha\beta}(s) dQ(s) = 1 \quad (\alpha \leqslant x < \beta). \tag{8}$$

---

* Гильбертово пространсто $L_S^{(2)}(-\infty, +\infty)$ вектор-функций впервые было построено в нашей работе ([4]) (см. также ([5]), § 1 и ([6]), п. 86).

Существует единственная функция, обладающая указанными свойствами (в случае, когда $Q(x)$ абсолютно непрерывна, $h_{\alpha\beta}(x)$ — решение задачи Коши: $y''-q(x)y=0$ $(\alpha<x<\beta)$, $y(\alpha)=0$, $y^{+}(\alpha)=1$ — в классе функций, абсолютно непрерывных на $[\alpha, \beta]$ вместе с производной).

Интервал $[\alpha, \beta]\subset I$ называем MQ — сильно искажающим, если 1) $M(\alpha-0)<M(\alpha+0)=M(\beta-0)<M(\beta+0)$, 2) $h_{\alpha\beta}(\beta)=0$. Заметим, что второе требование не может выполняться, если $Q(x)$ не убывает на (α, β).

Теорема 1. *Система собственных функций дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ в том и только том случае полна в* H, *когда отсутствуют MQ — сильно искажающие интервалы; в этом случае для любой точки $c\in I$ существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная спектральная матрица-функция дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$.*

Из этой теоремы вытекает, что в случае абсолютной непрерывности функций $M(x)$ и $Q(x)$, требование положительности $M'(x)$ для существования спектральных матриц-функций и для полноты в H системы собственных функций излишне* (уже непрерывность функции $M(x)$ влечет отсутствие MQ-сильно искажающих интервалов).

Поясним причину неполноты системы собственных функций при наличии MQ — сильно искажающих интервалов. В работе ([12]), где была вскрыта особая роль MQ — сильно искажающих интервалов, (они были введены еще в работе ([13])), MQ — сильно искажающему интервалу $[\alpha, \beta]$ ставилась в соответствие функция $u_{\alpha\beta}(x)$, равная нулю всюду на I за исключением точек α и β, где $u_{\alpha\beta}(\alpha)=-1/m_M[\alpha]$, $u_{\alpha\beta}(\beta)=h^{-}_{\alpha\beta}(\beta)/m_M[\beta]$ ($m_M[\gamma]$ — M — мера точки γ), и изображаемый ею элемент $\mathbf{u}_{\alpha\beta}$. Там, с помощью тождества (5) установлено (([12]), лемма 2), что для любой функции $f(x)\in D_{MQ}$ и любого MQ-сильно искажающего интервала $[\alpha, \beta]$

$$\int_I u_{\alpha\beta}(x)f(x)dM(x)=0 \quad (f(x)\in D_{MQ}), \tag{9}$$

что равносильно равенству: $f(\alpha)=f(\beta)h^{-}_{\alpha\beta}(\beta)$. Очевидно последнему соотношению удовлетворяет любая функция $f(x)$, представимая в виде интеграла из (6), а. т. к. M-меры точек α и β MQ-сильно искажающего интервала $[\alpha, \beta]$ положительны, то ему должна удовлетворять любая функция $f(x)\in$ H, разложимая по собственным функциям.

Итак, если $f(x)\in$ H разложима по собственным функциям диф-

---

* Обычно (см., например, ([1]–[10])) при доказательстве полноты требуют, чтобы в уравнении (4) функция $\rho(x)$ ни на каком интервале не обращалась в нуль п. в., либо рассматривают уравнения, равносильные (4) с $\rho(x)>0$. Исключение составляет монография ([11]) Ф. Аткинсона. Однако, допустив наличие таких интервалов, автор требует в ([11]) равенства нулю на этих интервалах функции $q(x)$ и налагает еще одно трудно проверяемое условие (([11]), гл. VIII).

ференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$, то $f(x)$ принадлежит множеству $\mathbf{H}_\perp$ тех элементов из $\mathbf{H}$, которые ортогональны ко всем элементам $\mathbf{u}_{\Delta}$, соответствующим MQ-сильно искажающим интервалам (при отсутствии последних $\mathbf{H}_\perp = \mathbf{H}$ и этот факт тривиален). Если имеется хотя бы один MQ—сильно искажающий интервал $[\alpha, \beta]$, то $\mathbf{H}_\perp \neq \mathbf{H}$, ибо $\| \mathbf{u}_{\Delta} \|_{\mathbf{H}} \neq 0$; отсюда вытекает неполнота в $\mathbf{H}$ системы собственных функций дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$. Попутно установлена часть теоремы 2, обобщающей теорему 1. В ([12]) построен пример, где $\mathbf{H}_\perp = \{\theta\}$, а $\mathbf{H}$ бесконечномерно.

Обобщением понятия спектральной матрицы-функции является понятие квазиспектральной матрицы-функции. Определения квазиспектральной матрицы-функции и ортогональной квазиспектральной матрицы-функции получаются из приведенных выше определений спектральной и ортогональной спектральной матрицы-функции заменой в них множества $\mathbf{H}''$ на множество $\mathbf{H}_\perp$ тех элементов $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_\perp$, которые изображаются функциями $f(x)$ такими, что сходятся интегралы в (7) при любом вещественном λ.

Из наличия квазиспектральной матрицы-функции вытекает разложимость по собственным функциям дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ любой функции $f(x) \in \mathbf{H}_\perp$. Имеет место

Теорема 2. *Какова бы ни была точка $c \in I$, существует хотя бы одна соответствующая ей ортогональная квазиспектральная матрица-функция дифференциального выражения $l_{MQ}[\cdot]$ и, следовательно, по собственным функциям этого дифференциального выражения разложимы те и только те $f(x) \in \mathbf{H}$, которые принадлежат $\mathbf{H}_\perp$.*

4. Приведем идею доказательства теорем 1 и 2. По аналогии с тем, как это делается, например, в ([14]) (([14]), § 17) строим оператор, порождаемый в $\mathbf{H}$ дифференциальным выражением $l_{MQ}[\cdot]$.

Элемент $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ относим к множеству D_0', если существует функция $f(x) \in \mathbf{f}$ такая, что 1) $f(x) \in D_{MQ}$, 2) $f(x)=0$ вне некоторого сегмента $[a_f, b_f] \subset (a, b)$, 3) $l_{MQ}[f](x) \in \mathbf{H}$; при этом полагаем, что функция $l_{MQ}[f](x)$ изображает элемент $L_0'\mathbf{f} \in \mathbf{H}$.

Несмотря на полную аналогию с ([14]) так построенное бинарное отношение L_0' не всегда является оператором (т. е. не всегда $L_0'\mathbf{f}$ однозначно определяется элементом $\mathbf{f} \in D_0'$). Оказывается (это устанавливается с помощью рассуждений из ([13])) оно в том и только в том случае является оператором, когда отсутствуют MQ—сильно искажающие интервалы. В этом случае, как это вытекает из (5), L_0' эрмитов в $\mathbf{H}$ оператор. Доказательство существования спектральной матрицы-функции при условии теоремы 1 проводится путем применения метода направляющих функционалов М. Г. Крейна ([15]) к оператору L_0'.

В том случае, когда имеются MQ-сильно искажающие интервалы для любого $f \in D_0'$ одно и только одно значение $L_0 f$ принадлежит $H_\perp$ (это устанавливается с помощью рассуждений, проведенных в нашей работе ([12])). Положим $L_{0\perp} f$ равным указанному значению $L_{0\perp}$ этим определим оператор с областью задания $D_{0\perp} = D_0$. Как явствует из (9), $D_{0\perp} \subset H_\perp$. Таким образом, $L_{0\perp}$ — действующий в $H_\perp$ оператор. Он эрмитов. Существование квазиспектральной матрицы-функции доказывается с помощью применения метода направляющих функционалов к этому оператору.

Одесский технологический институт
пищевой промышленности им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ԿԱՑ

Երկրորդ կարգի ընդհանրացված դիֆերենցիալ արտահայտության սեփական ֆունկցիաների ոչ-լրիվության մասին

Ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման այն բանի, որպեսզի

$$-\frac{d}{dM(x)}\left[y^{+}(x)-\int_{k+0}^{x+0} y(s)\,dQ(s)\right]-\lambda y(x)=0 \quad (a<x<b)$$

Շտուրմ—Լիուվիլլի ընդհանրացված հավասարման լուծումների սիստեմը լինի լրիվ $L^{(2)}_M(a, b)$ տարածության մեջ։ Այստեղ $M(x)$-ը (a, b)-ում չնվազող ֆունկցիա է. $Q(x)$-ը երկու մոնոտոն չնվազող ֆունկցիաների տարբերություն է. k-ն ֆիքսած կետ է (a, b)-ից. λ-ն կոմպլեքս պարամետր է։ Ոչ լրիվության դեպքում պարզվում է, թե $L^{(2)}_M(a, b)$-ի ո՞ր ենթատարածության մեջ է այդ սիստեմը լրիվ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Кац*, Матем. сборн., т. 68 (110), № 2, 174 (1965). [2] *И. С. Кац* и *М. Г. Крейн*. О спектральных функциях струны, Доп. 2 к кн. Ф. Аткинсона: Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968, стр. 648. [3] *И. С. Кац*, ДАН СССР, т. 106, № 1 (1956). [4] *И. С. Кац*, Ученые записки Харьковского госуниверситета, т. 34 (1950). [5] *И. С. Кац*, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 27, № 5 (1963). [6] *Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман*, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Наука», М., 1966. [7] *J. Weldmann*, Math. Zeitschr., b. 98, 268 (1967). [8] *H. Weyl*, Math. Ann., b. 68, 220 (1910). [9] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*, Линейные операторы, «Мир», М., 1966. [10] *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон*, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958. [11] *Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», М., 1968. [12] *И. С. Кац*, Матем. сборн., т. 79 (121), № 3, 368 (1969). [13] *И. С. Кац*, Матем. сборн., т. 76 (118), № 1, 147 (1968). [14] *М. А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», М., 1969. [15] *М. Г. Крейн*, Збірник праць Інституту математики АН УРСР, т. 10, 83 (1948).