

УДК 51 : 621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

Индуктивный вывод с обратной связью

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергелином 25/X 1974)

1. В заметке рассмотрена одна из формализаций процесса расшифровки пар конечных множеств посредством индукторов—алгоритмов индуктивного обобщения. Предполагается, что информация об искомой паре множеств задается некоторой последовательностью ее подмножеств.

Исследуется процесс расшифровки для случая, когда указанные последовательности порождаются алгоритмами с обратной связью от формируемых индукторами гипотез.

Работа относится к направлению исследований, описанных (¹⁻⁴), и является продолжением работы (⁵), в которой рассмотрены некоторые статические характеристики индукторов.

2. Введем определения, придающие точный смысл нашему пониманию процесса индуктивного обобщения. При этом мы используем обозначения, введенные в (⁵).

Определение 1. Генератором последовательности номеров (ГПН) назовем произвольную ОРФ, значения которой принадлежат T .

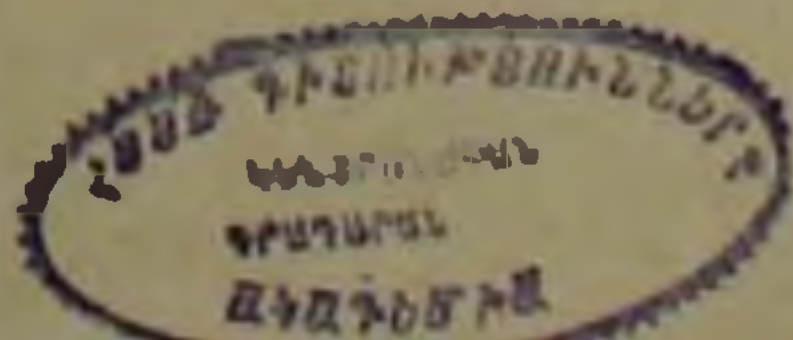
Определение 2. ГПН φ назовем расширяющимся (РГПН), если $\forall t (\varphi(t) \subseteq \varphi(t+1))$, и строго расширяющимся (СРГПН), если $\forall (t < k \rightarrow \varphi(t) \subset \varphi(t+1) \vee |\varphi(t)| = k)$.

Определение 3. Будем говорить, что ГПН φ согласован с ПМ v , если $\forall t (\varphi(t) \subseteq v)$.

Через $\Phi(v)$ будем обозначать множество всех ГПН, согласованных с ПМ v .

Отметим, что определение ГПН соответствует интуитивному понятию «обучающей последовательности» часто используемому в литературе по распознаванию образов. В дальнейшем, для каждого ГПН нас будут интересовать лишь значения $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(c)$, при $c \leq k$, т. к. всякая ПМ, составленная из элементов M , может быть описана посредством обучающей последовательности длины не более k , перечисляющей все элементы этой ПМ.

Определение 4. Для произвольных индуктора f и ГПН φ индуктивным выводом с индуктором f над ГПН φ (или сокращен-



но $[f, \varphi] - HB$ назовем функцию h из N в T такую, что

$$h(0) = f(\varphi(0)),$$

$$h(t+1) = \begin{cases} h(t), & \text{если } \varphi(t+1) \subseteq h(t), \\ f(\varphi(t+1)), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $[f, \varphi] - HB$ и является ОРФ.

Определение 5. Для произвольных — индуктора f , ПМ v , ГПН $\varphi \in \Phi(v)$, временной сложности v в $[f, \varphi] - HB$ назовем число

$$S_{op}(v, f, \varphi) = \begin{cases} \mu_k (v \subseteq h(t)), & \text{если такое } t \text{ существует,} \\ k+1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где μ — оператор минимизации.

Объемной сложностью v в $[f, \varphi] - HB$ назовем число

$$S_{ob}(v, f, \varphi) = \begin{cases} |\varphi(a)|, & \text{при } a \leq k, \text{ где } a = S_{op}(v, f, \varphi), \\ k+1, & \text{в противном случае}^* \end{cases}$$

Определение 6. Для произвольных непустых $A \subseteq T$, $G \subseteq F$, объемной сложностью A в $[G] - HB$ назовем число

$$S_{ob}^1(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} \min_{\varphi \in \Phi(v)} S_{ob}(v, f, \varphi).$$

Очевидны следующие свойства введенных выше понятий.

1. Для произвольных ПМ $v \in T$ индукторов $f_1, f_2 \in F$ и ГПН φ , если $S_{op}(v, f_1, \varphi) = S_{op}(v, f_2, \varphi)$, то $S_{ob}(v, f_1, \varphi) = S_{ob}(v, f_2, \varphi)$.

Обратное в общем случае неверно. Однако для РГПН φ оба утверждения эквивалентны.

$$2. \forall f \forall v (f \in F \& v \in T \rightarrow S_{ob}^1(|v|, f) = \min_{u \subseteq v, v \subseteq f(u)} \ln(u)).$$

Следствие. Для произвольных непустых $A \subseteq T$, $G_1 \subseteq F_{nc}$, $G_2 \subseteq F_c$, имеем $S_{ob}(A, G_1) \leq S_{ob}^1(A, G_1)$ и $S_{ob}(A, G_2) = S_{ob}^1(A, G_2)$.

$$3. \forall v \exists f \forall \varphi (v \in T \setminus D^k \& \varphi \in \Phi(v) \rightarrow f \in F_{nc} \& S_{ob}(v, f, \varphi) = k+1),$$

т. е. v недостижимо в индуктивном выводе со специально выбранным несогласующим индуктором. В классе согласующих индукторов такой выбор невозможен.

$$4. \forall f \forall \varphi (f \in F_c \& v \in T \& \varphi \in \Phi(v) \& (\varphi - \text{СРГПН}) \rightarrow S_{ob}(v, f, \varphi) \leq |\varphi(t^* + 1)|), \text{ где } t^* = \mu_t (|\varphi(t)| < v).$$

В нижеследующем следствии к теореме 1 утверждается существование ПМ максимальной сложности для произвольного заданного согласующего индуктора. Тем самым опровергается идея об оптимальном индукторе в индуктивных выводах.

Произвольный индуктор f назовем абсолютизирующим, если

* Введенные понятия временной и объемной сложностей идейно близки рассмотренным в (1).

$\forall x(x \in T \rightarrow f(x) \in D^k)$. Множество абсолютизирующих индукторов обозначим через Ω .

Теорема 1. Для произвольных согласующего абсолютизирующего индуктора f и строго возрастающей ОРФ φ можно построить РГПН φ такой, что для $[f, \varphi] - ИВ h$

$$\forall t(t \geq 1 \ \& \ \varphi(t) \leq k \rightarrow |\varphi(t)| = \varphi(t) \ \& \ h(t+1) \neq h(t)).$$

Данная теорема является обобщением аналогичной теоремы, доказанной в (4) для 1-индукторов.

Следствие. $\forall f \exists v \exists \varphi (f \in \Omega \cap F_c \ \& \ t \in N \rightarrow v \in D^k \ \& \ \varphi \in \varphi(v) \ \& \ \varphi(t) \subseteq \varphi(t+1) \ \& \ S_{op}(v, f, \varphi) S_{ob}(v, f, \varphi) = k)$.

Доказательство легко получить, если в условиях теоремы выбрать $\varphi(t) = t$.

3. Рассмотрим процесс индуктивного обобщения для случая, когда предоставлена возможность специального типа управления данными, используемыми при построении гипотез.

Определение 7. Произвольную 3-х местную ОРФ q назовем *регулятором*, если

$$\forall txy((t, x, y) \in N \times T \times T \rightarrow q(t, x, y) \in T \ \& \ v_0(q(t, x, y)) = \Phi).$$

Множество всех регуляторов обозначим через Q .

Определение 8. Для произвольных $f \in F$ и $q \in Q$, произвольный ГПН φ назовем *(f, q) — порожденным*, а $[f, \varphi] - ИВ h$ назовем $[f, \varphi] - ИВ с регулятором q$, если φ удовлетворяет следующим условиям:

1. $v_1(\varphi(0)) \cup v_0(\varphi(0)) \subseteq |a|$, где a — заранее фиксированный элемент из M ,

$$2. \forall t(t > 0) (v_1(\varphi(t+1)) \cup v_0(\varphi(t+1)) \subseteq v_1(q(t, \varphi(t), h(t)))).$$

Определение 9. Для произвольных $f \in F$, $q \in Q$, $v \in T$, (f, q) — порожденный ГПН φ назовем *согласованным с v*, если φ удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \varphi(0) = \kappa(v_1(v) \cap |a|, v_0(v) \cap |a|),$$

$$2. \varphi(t+1) = \kappa(v_1(v) \cap v_1(q(t, \varphi(t), h(t))), v_0(v) \cap v_0(q(t, \varphi(t), h(t)))), \text{ где } h(t) = [f, \varphi] - ИВ.$$

Очевидно, что при фиксированных $f \in F$, $q \in Q$, $v \in T$ существует единственный (f, q) — порожденный и согласованный с v ГПН φ .

Содержательно, каждый регулятор определяет некоторый способ формирования вопросов, относящихся к расшифровываемой ПМ; способ построения (f, q) — порожденного и согласованного с этой ПМ ГПН описывает механизм получения ответов на заданные вопросы.

Нижеследующие теоремы 2—4 устанавливают некоторые общие ограничения на индуктивный вывод с регулятором.

Теорема 2. $\forall qv \exists fg (q \in Q \ \& \ v \in D^{k-1} \rightarrow f \in F_{nc} \ \& \ g \in F_c \ \& \ S_{ob}(vf) < k \ \& \ S_{ob}(vg) < k \ \& \ S_{ob}(v, f, \varphi^*) = S_{ob}(v, g, \varphi_1^*) = k+1)$, где

φ^* и φ_1^* , соответственно, (f, q) — и (g, q) — порождены и согласованы с ПМ v .

Теорема 2 показывает, что для произвольных регулятора q и абсолютной ПМ v существуют индукторы такие, что в соответствующем процессе индуктивного обобщения регулятор q не сможет выработать тех данных, посредством которых индуктор f мог бы расшифровать задуманную ПМ.

Теорема 3. $\forall f \exists \varphi \exists q^* (f \in F \ \& \ \varphi \in \Phi(v) \ \& \ v \in T \rightarrow q^* \in Q \ \& \ S_{\text{об}}(v, f, \varphi^*) \leq S_{\text{об}}(v, f, \varphi))$.

где $\varphi^* = (f, q^*)$ — порожденный и согласованный с v ГПН.

Теорема 3 уточняет интуитивно ясное положение о том, что для произвольных заданных индуктора f , ПМ v и ГПН φ можно построить соответствующий регулятор такой, что порожденный им и согласованный с v ГПН φ^* позволит расшифровать v не хуже чем с ГПН φ .

Теорема 4. 1. $\exists q^* \forall q f v (q \in Q \ \& \ f \in F_{\text{нс}} \ \& \ v \in T \rightarrow q^* \in Q \ \& \ S_{\text{об}}(v, f, \varphi^*) \leq S_{\text{об}}(v, f, \varphi))$.

2. $\exists q^{**} \forall q f v (q \in Q \ \& \ f \in F_c \ \& \ v \in T \rightarrow q^{**} \in Q \ \& \ S_{\text{об}}(v, f, \varphi^{**}) \leq S_{\text{об}}(v, f, \varphi))$.

где φ^* , φ^{**} и φ , соответственно, (f, q^*) —, (f, q^{**}) — и (f, q) — порождены и согласованы с v .

Теорема 4 непосредственно следует из теорем 2 и 3 и отрицает существование оптимального регулятора для каждого из классов $F_{\text{нс}}$ и F_c .

5. Известна следующая задача: для произвольной формулы исчисления высказываний дать оценку числа испытаний, посредством которых можно точно установить, является ли данная формула тавтологией или нет.

В нашей формализации указанная задача соответствует следующей.

Пусть $P = \{q \mid q \in Q \ \& \ \forall t x y (q(t, x, y) \subseteq q(t+1, x, y) \ \& \ |q(t+1, x, y)| = |q(t, x, y)| + 1)\}$.

Требуется найти $\min_{f \in F, q \in P} \max_{v \in U^k} S_{\text{об}}(v, f, \varphi^*)$, где $\varphi^* = (f, q)$ — порожден и согласован с v .

Теорема 5. $\forall f q \exists v (f \in F \ \& \ q \in P \rightarrow v \in D^k \ \& \ S_{\text{об}}(v, f, \varphi) = k)$, где $\varphi = (f, q)$ — порожден и согласован с v .

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за редактирование статьи.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Հետադարձ կապով ինդուկտիվ առաժնում

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր բազմությունների զույգերի վերածման պրոցեսն ինդուկտորների (ինդուկտիվ ընդհանրացման ալգորիթմների) միջոցով և այդ պրոցեսի որոշ ձևականացումը:

Ննթադրվում է, որ փնտրվող զույգերի մասին ինֆորմացիան տրվում է նրանց ենթաբազմությունների հաջորդականությամբ:

Հետազոտվում է վերժանման պրոցեսն այն դեպքի համար, երբ վերոհիշյալ հաջորդականությունները կառուցվում են այնպիսի ալգորիթմներով, որոնք ունեն հետադարձ կապ ինդուկտորների միջոցով կառուցված վարկածների հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. А. Трехтенброт, Сложность алгоритмов и вычислений, ИГУ, Новосибирск, 1967. ² Я. М. Барздин, ДАН СССР, т. 206, № 3 (1972). ³ Э. Хант, Дж. Марин, Ф. Стоун, Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине «Мир», М., 1970. ⁴ Э. М. Погорян, ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1 (1974). ⁵ Э. М. Погорян, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 31, 1975.