

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. О. Саркисян

Передача нагрузки от тонкой цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому цилиндру

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 24/XI 1974)

Контактным и смешанным задачам теории упругости для упругого бесконечного цилиндра посвящено большое число исследований, достаточно полная библиография которых содержится в книге ⁽¹⁾, а также в работе ⁽²⁾.

В настоящей статье рассматривается контактная задача другого типа, а именно осесимметричная задача о передаче кольцевой сосредоточенной горизонтальной нагрузки от цилиндрической оболочки конечной длины к бесконечному упругому сплошному цилиндру. Она представляет аналог известной задачи о передаче нагрузки от стержня к полубесконечной упругой пластинке, рассмотренной многими авторами ⁽³⁻⁵⁾. Здесь, как и в указанных работах, исходя из известных физических предположений ^(5,9) решение упомянутой задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения при определенных граничных условиях и с ядром, выражающимся суммой двух слагаемых: первое из которых—сингулярная часть, представляет собой ядро Коши, а второе—регулярная часть, имеет квадратично суммируемые первые частные производные.

При помощи многочленов Чебышева первого рода строится точное решение этого уравнения, содержащего в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние в окрестности концов цилиндрической оболочки.

1. *Постановка задачи и вывод основного уравнения.* Пусть бесконечный упругий цилиндр радиуса $r=a$ на конечной части своей поверхности усилен приклеенным к нему упругим креплением в виде цилиндрической оболочки малой постоянной толщины h . Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль поверхности соприкосновения упругой оболочки с цилиндром, когда на одном из торцов обо-

лодки действует кольцевая осесимметричная горизонтальная нагрузка интенсивности p (рис. 1).

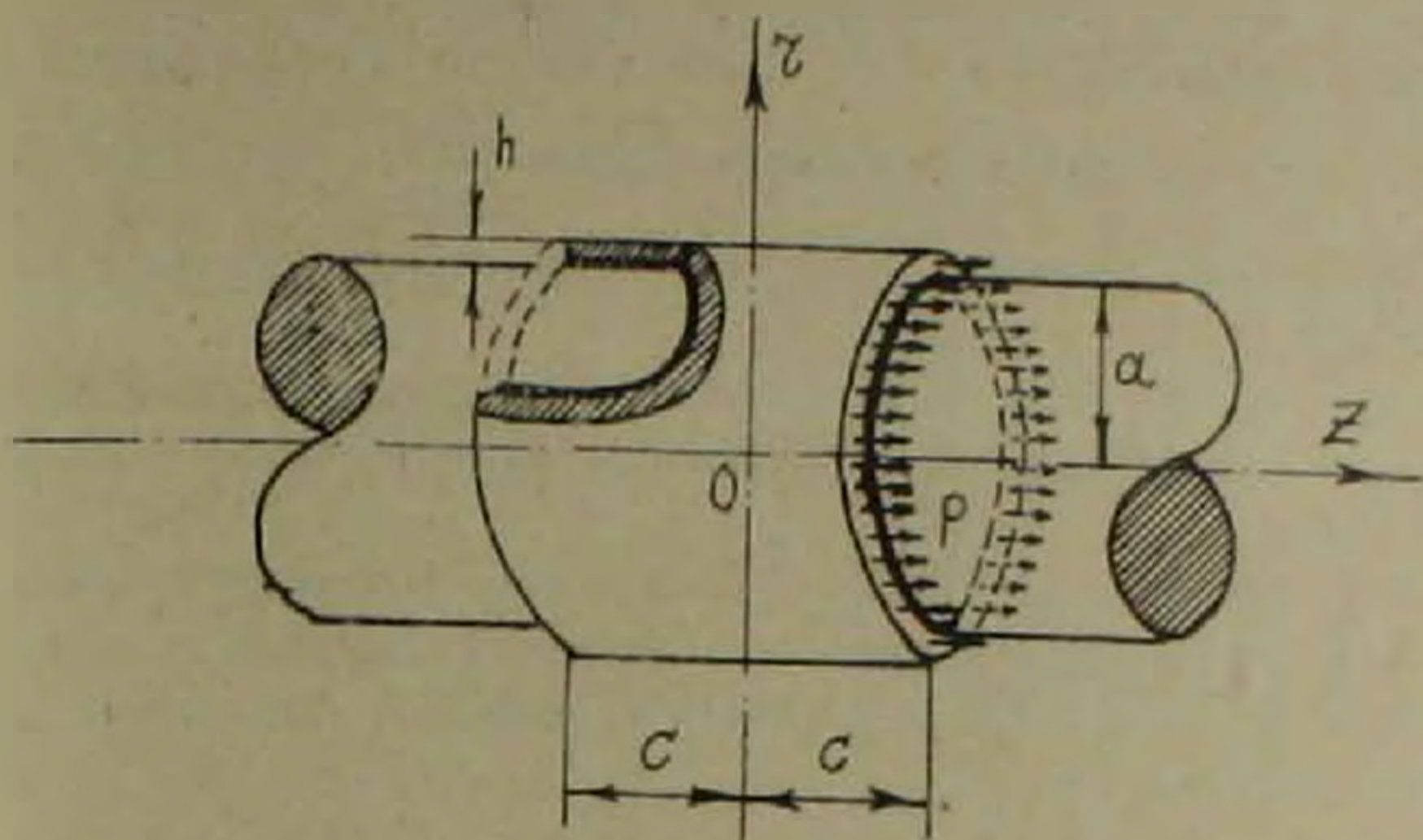


Рис. 1

Как в работах ^(5,9), будем предполагать, что вследствие малости толщины оболочки жесткость ее на изгиб пренебрежимо мала и поэтому можно пренебречь давлением оболочки на цилиндр, т. е. считать, что оболочка находится в безмоментном одноосном напряженном состоянии.

Рассмотрим равновесие части $(-c, z)$ оболочки. По безмоментной теории оболочек условие равновесия осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки в разбираемом случае выражается формулой

$$N_z = \int_{-c}^z \tau(s) ds. \quad (1.1)$$

Здесь N_z — нормальное усилие, действующее в произвольном поперечном сечении оболочки, а $\tau(z)$ — неизвестное тангенциальное напряжение, действующее на оболочку вдоль поверхности контакта ее с цилиндром и подлежащее определению. Отсюда для осевой деформации находим

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{dw_1(z)}{dz} = \frac{N_z}{E_1 h} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-c}^z \tau(s) ds, \quad (1.2)$$

где E_1 — модуль упругости материала оболочки, $w_1(z)$ — перемещения точек оболочки вдоль ее оси.

С другой стороны, известно ⁽¹⁰⁾, что функция влияния для упругого бесконечного сплошного цилиндра имеет вид:

$$w_1(a, z) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{[(3-\nu)\Omega_1^2(\beta) - 1]\beta - 4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2[\Omega_1^2(\beta) - 1] - 2(1-\nu)]} \cos\beta \frac{z-s}{a} d\beta. \quad (1.3)$$

Здесь $w_1(a, z)$ — перемещения точек поверхности цилиндра вдоль оси z , когда в сечении $z=s$ на поверхности цилиндра действует кольцевая сосредоточенная осесимметричная горизонтальная нагрузка единичной интенсивности; μ и ν — соответственно коэффициенты Ламе и Пуассона для материала цилиндра; $\Omega_1(\beta) = \frac{I_0(\beta)}{I_1(\beta)}$, где $I_0(\beta)$ и $I_1(\beta)$ — модифицированные функции Бесселя, соответственно нулевого и первого порядка.

Отметим, что формула (1.3) представляет собой обратное преобразование Фурье и его следует трактовать в смысле теории обобщенных функций ⁽¹¹⁾.

Преобразуем формулу (1.3). С этой целью пользуемся известными асимптотическими разложениями при больших значениях аргумента для функций Бесселя ⁽¹²⁾. В результате получаем следующее асимптотическое представление

$$\frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)]} \sim \frac{C_1}{\beta} + \frac{C_2}{\beta^2} + \frac{C_3}{\beta^3} \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad (1.4)$$

$$\text{где } C_1 = 2(1-\nu), \quad C_2 = (1-2\nu)^2, \quad C_3 = 16\nu^2 - 8\nu^3 - \frac{31}{4}\nu - \frac{3}{8}. \quad (1.5)$$

Учитывая (1.4) формуле (1.3) можно придать вид

$$w_1(a, z) = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ -C_1 \ln \left| \frac{s-z}{a} \right| - \frac{1}{2} \pi C_2 \left| \frac{s-z}{a} \right| + C + \int_0^\infty \left| \frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta[\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)]} - \frac{C_1}{\beta} - \frac{C_2}{\beta^2} \right| \cos \beta \frac{s-z}{a} d\beta \right\}, \quad (1.6)$$

где C — некоторое постоянное.

На основании последней формулы для осевой деформации $\varepsilon_z^{(2)}(a, z)$ точек поверхности цилиндра будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{(2)}(a, z) &= \frac{dw_1^{(2)}(a, z)}{dz} = \frac{C_1}{2\pi\mu} \left\{ \int_{-c}^c \left| \frac{a}{s-z} - \frac{1}{2} \pi \frac{C_2}{C_1} \frac{\text{sign}(s-z)}{a} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{C_1} \int_0^\infty \left| \frac{|(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta)-1|\beta-4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta^2|\Omega_1^2(\beta)-1|-2(1-\nu)} - C_1 - \frac{C_2}{\beta} \right| \cos \beta \frac{s-z}{a} d\beta \right\} \tau(s) ds \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отметим, что первый интеграл в (1.7) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Теперь заметим, что на поверхности соединения оболочки с цилиндром должно иметь место условие

$$w^1 = w^2 \quad \text{при } r=a, \quad -c < z < c \quad (1.8)$$

или условие

$$e_z^{(1)} = e_z^{(2)} \text{ при } r=a, -c < z < c, \quad (1.9)$$

которое эквивалентно (1.8)

Пользуясь соотношением (1.2), (1.7) и условием (1.9), получаем

$$\varphi(\xi) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \int_{-1}^1 K(\eta - \xi) \varphi'(\eta) d\eta + A. \quad (1.10)$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\xi = \frac{z}{a}, \quad \eta = \frac{s}{a}, \quad \frac{\tau(s)a}{\rho} = \tau_0(\eta), \quad (1.11)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{C_1} \frac{\mu}{E_1} \frac{a}{h} + \pi \frac{C_2}{C_1}, \quad A = \frac{1}{2} \pi \frac{C_2}{C_1}, \quad (1.12)$$

$$\varphi'(\eta) = \tau_0(\eta), \quad \varphi(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \tau_0(\eta) d\eta, \quad (1.13)$$

$$K(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{[(3-2\nu)\Omega_1^2(\beta) - 1]\beta - 4(1-\nu)\Omega_1(\beta)}{\beta^2[\Omega_1^2(\beta) - 1] - 2(1-\nu)} - C_1 - \frac{C_2}{\beta} \right\} \sin\beta t d\beta, \quad (1.14)$$

Далее рассматривая равновесие оболочки, обнаруживаем, что должно выполняться условие:

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 1. \quad (1.15)$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи для упругого цилиндра с упругим креплением в виде цилиндрической оболочки конечной длины свелось к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.15).

Ядро этого уравнения состоит из двух слагаемых: первое из которых представляет собой ядро Коши, а второе на основании (1.4) имеет квадратично суммируемые на квадрате $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ первые частные производные.

2. Сведения разрешающего уравнения (1.10) к бесконечной системе линейных уравнений. Решение интегро-дифференциального уравнения (1.10) ищем в виде

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} Z_n T_n(\xi), \quad -1 < \xi < 1, \quad (2.1)$$

где $T_n(\xi)$ — многочлены Чебышева первого рода.

Будем иметь

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_{-1}^{\xi} \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 < \xi < 1. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание граничные условия (1.15), из последней форму-

лы находим $Z_0 = \frac{1}{\pi}$

Далее важную роль будут играть известные соотношения [13]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1 - \eta^2}} = U_{n-1}(\xi), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$(-1 \leq \xi \leq 1)$$

где $U_{n-1}(\xi)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Подставляя выражение (2.1) и (2.2) в (1.10) и используя соотношение (2.3), после некоторых элементарных выкладок приходим к бесконечной системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n K_{m,n} + b_m, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (2.4)$$

где

$$K_{m,n} = K_{m,n}^{(1)} + K_{m,n}^{(2)}, \quad (2.5)$$

$$K_{m,n}^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n = m \pm 1 \\ \frac{1}{\pi^2} \frac{m[1 + (-1)^{n-m}]}{|(n-m)^2 - 1| |(n+m)^2 - 1|}, & \text{при } n \neq m \pm 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$K_{m,n}^{(2)} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} U_{m-1}(\xi) d\xi \int_{-1}^1 K(\eta - \xi) \frac{T_n(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta, \quad (2.7)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} (K_{m,0} + A \delta_{m,1}), \quad \delta_{m,1} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 1 \\ 0 & \text{при } m \neq 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

3. *Исследование бесконечной системы (2.4).* Исследование бесконечной системы (2.4) в случае только одного ядра $K_{m,n}^{(1)}$ содержится в работе (6). Здесь мы покажем, что добавление к этому Ярунова ядра $\{K_{m,n}^{(2)}\}_{m,n=1}^{\infty}$ не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполной регулярности.

Действительно, на основании свойств функции $K(t)$ можем записать

$$K_{m,n}^{(2)} = -\frac{2}{\pi^2 n} h_{m,n}, \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где

$$h_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi} \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2} U_{n-1}(\eta) U_{m-1}(\xi) d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Тогда будем иметь

$$\Phi_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(2)}| = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |h_{m,n}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Теперь заметим, что коэффициенты $\{h_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье квадратично суммируемой в квадрате $-1 <$

$\eta < 1$ функции $\frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi}$ по полной ортогональной системе

$\{U_{n-1}(\xi) U_{m-1}(\eta)\}_{m,n=1}^{\infty}$. Поэтому справедливо равенство Порсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2 = \frac{4}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial K(\eta - \xi)}{\partial \xi} \right|^2 \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\eta^2} d\xi d\eta, \quad (3.4)$$

Откуда следует, что двойной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2$ сходится. По известной теореме (14), тогда сходится и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m, \quad \text{где} \quad C_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2. \quad (3.5)$$

Следовательно, по крайней мере

$$C_m = O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

где ε — малое положительное число.

Далее

$$\Phi_m < \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| h_{m,n} \right|^2} = \frac{2}{\pi\sqrt{6}} \sqrt{C_m}. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание (3.6), имеем

$$\Phi_m = O\left(\frac{1}{m^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\right) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

что и доказывает высказанное выше утверждение о квазиполной регулярности бесконечной системы.

Автор признателен академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и ценное обсуждение полученных результатов.

Ленинakanский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

II. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Սեփ փոխանցումը վերջավոր երկարության բարակ զլանային լուղանրից
անվերջ առաձգական հոծ զլանին

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր երկարության բարակ զլանային
թաղանթից անվերջ առաձգական զլանին առանցքաձիգ կենտրոնացված
«դակաձև բևոյ փոխանցման կոնտակտային խնդիրը»:

Խնդրի լուծումը բերվում է անհայտ կոնտակտային լարումն արտահայտող
թուկցիայի նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման
լուծմանը:

Չերիչեի առաջին սեփ թաղմանդամների օգնությամբ կառուցվում է
հավասարման ճշգրիտ լուծումը, որի մեջ բացահայտվում է առանձնացված են
այն եղակիություները, որոնք բնութագրում են լարվածային վիճակի զլա-
նային թաղանթի ձայրակետերի շրջակայքում:

ЛИТЕРАТУРА — 7800000000000

- ¹ Механика в СССР за 50 лет, т. 3, Изд. «Наука», М., 1972. ² В. М. Александров, А. В. Белокопы. Контактные задачи теории упругости для цилиндрических тел, 3-й Всесоюзный съезд по теорет. и прикл. механике, Изд. АН СССР, М., 1968. ³ E. H. Bentscoter I. Appl. Mech., vol. 16, N 3, p. 242 (1949). ⁴ H. Buefler. Selbste mit endlicher elastischer Versteifung. VDI — Forschungsh. N 485, S. 44 (1961). ⁵ H. X. Арутюнян. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением ПММ, т. 32, вып. 34, 1968. ⁶ N. K. Arutunyan and S. M. Mkrtaryan, Some Contact Problems for a Semiplane with Elastic Stiffeners. Trends in Elasticity and Thermoelasticity; Witold Nowascki Anniversary Volume. Wolters — Noordhoff Publish. 1971, p. 3—20. ⁷ Эрдоген, Гунта. Прикладная механика. Тр. Америк. о-ва инж. механ., сер. Е, М., Мир, т. 37, № 4 (1971). ⁸ Г. А. Морарь, Г. Я. Попов. ПММ, т. 34, вып. 3 (1970) г. ⁹ E. Melan, Ing. — Archiv, Bd. 3, Heft 2, S. 123 (1932). ¹⁰ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, Контактная задача для упругого бесконечного цилиндра, усиленного бесконечной цилиндрической оболочкой. В сборнике, посвященном шестидесятилетию акад. Челомея. ¹¹ Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, изд. «Наука», М., 1965. ¹² Г. Бейтмен и А. А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, изд. «Наука», М., 1966. ¹³ И. С. Грешинштейн, Н. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4, М., Физматгиз, 1962. ¹⁴ Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 1, физматгиз, М., 1963.