ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 3

УДК 539.301

МЕХАНИКА

Л. А. Агаловян, Ш. М. Хачатрян

Обобщенная ортогональность П. Ф. Папковича и условия существования затухающих решений в плоской задаче для ортотропной полуполосы

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 27/I 1975)

Построено однородное решение плоской задачи для ортотропной полосы, которое выражается через функции, обладающие свойством обобщенной ортогональности типа П. Ф. Папковича. Выведены условия, при которых в ортотропной полуполосе, продольные стороны которой свободны от напряжений, под действием различных типов торцевых воздействий возникает затухающее напряженно-деформированное состояние. Указанные условия, в частности, могут быть применены для сращивания основного и типа погранслоя решений в полосе, а также в уточненных теориях анизотропных пластинок и оболочек. При смешанных торцевых условиях определено само решение, удовлетворяющее условиям затухания.

1. Имеем ортотропную полуполосу $\Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < +\infty, -1 < y < +1\}$, главные направления анизотропии которой совпадают с направлениями координатных линий. Считается, что продольные стороны и бесконечно удаленный край полуполосы свободны от напряжений

$$\sigma_{xy} = \sigma_y = 0 \quad \text{при } y = \pm 1, \tag{1.1}$$

на кромке $x = 0$ задано одно из следующих условий:

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 1)} \tag{1.2}$$

$$u(0, y) = f_1(y), \qquad \sigma_{xy}(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 2)} \tag{1.3}$$

$$\sigma_x(0, y) = f_1(y), \qquad v(0, y) = f_2(y) \qquad \text{(задача 3)} \tag{1.4}$$

Требуется выяснить, каким условиям должны удовлетворять функции $f_i(y)$, чтобы возникающие в полуполосе как напряжения, так и перемещения имели затухающий характер.

Поскольку полуполоса должна находиться в равновесии как абсолютное твердое тело, то должны иметь место

$$\int_{-1} \sigma_x(0, y)dy = 0, \tag{1.5}$$

$$\int_{-1}^{+1} y\sigma_x(0, y)dy = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}(0, y)dy = 0 \tag{1.6}$$

независимо от того, известно ли распределение напряжений по краю или нет. Небезынтересно выявить, как (1.5) и (1.6) связаны с $f_i(y)$ в случае задания на краю перемещений.

Решение плоской задачи ортотропного тела выразим через функцию напряжений $\Phi(x,y)$, которую будем искать в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k(y) \exp(-\lambda_k x). \tag{1.7}$$

имеем

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} A_k F''_k \exp(-\lambda_k x), \qquad \tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k F'_k \exp(-\lambda_k x),$$

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k^2 F_k \exp(-\lambda_k x), \tag{1.8}$$

$$u = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left| \frac{a_{11}}{\lambda_k} F''_k + a_{12}\lambda_k F_k \right| \exp(-\lambda_k x) + ay + b,$$

$$v = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left| \frac{a_{11}}{\lambda_k^2} F'''_k + (a_{12} + a_{66})F'_k \right| \exp(-\lambda_k x) - ax + c.$$

Все уравнения плоской задачи ортотропного тела ([1]) и граничные условия (1.1) будут удовлетворены, если

$$a_{11}F_k^{IV} + (a_{66} + 2a_{12})\lambda_k^2 F''_k + a_{22}\lambda_k^4 F_k = 0, \tag{1.9}$$

$$F_k(\pm 1) = 0, \qquad F'_k(\pm 1) = 0. \tag{1.10}$$

В зависимости от вида корней соответствующего (1.9) характеристического уравнения

а) βi, $-\beta i$; б) $\beta_1 i$, $\beta_2 i$; в) $\alpha + \beta i$, $-\alpha + \beta i$; $(\beta > 0,\ \beta_n > 0)$

возможны следующие решения краевой задачи (1.9), (1.10):

симметричная задача (σ_x, u, σ_y четные, τ_{xy}, v нечетные по y функции)

а) $F_k(y) = \sin\beta\lambda_k \cos\beta\lambda_k y - y\cos\beta\lambda_k \sin\beta\lambda_k y,$ (1.11)

где λ_k — корень уравнения $\sin 2\beta\lambda_k + 2\beta\lambda_k = 0$; (1.12)

б) $F_k(y) = \cos\beta_2\lambda_k \cos\beta_1\lambda_k y - \cos\beta_1\lambda_k \cos\beta_2\lambda_k y,$ (1.13)

$$\beta_1 \sin\beta_1\lambda_k \cos\beta_2\lambda_k - \beta_2 \sin\beta_2\lambda_k \cos\beta_1\lambda_k = 0; \tag{1.14}$$

в) $F_k(y) = \sin\beta\lambda_k \operatorname{sh}\alpha\lambda_k \cos\beta\lambda_k y \operatorname{ch}\alpha\lambda_k y - \cos\beta\lambda_k \operatorname{ch}\alpha\lambda_k \sin\beta\lambda_k y \operatorname{sh}\alpha\lambda_k y$ (1.15)

$$\alpha \sin 2\beta\lambda_k + \beta \operatorname{sh} 2\alpha\lambda_k = 0 \tag{1.16}$$

кососимметричная задача (σ_x, u, σ_y нечетные, τ_{xy}, v четные по y функции)

а) $F_k(y) = \cos\beta\lambda_k \sin\beta\lambda_k y - y \sin\beta\lambda_k \cos\beta\lambda_k y$ (1.17)

λ_k — корень $\sin 2\beta\lambda_k - 2\beta\lambda_k = 0$, (1.18)

б) $F_k(y) = \sin\beta_2\lambda_k \sin\beta_1\lambda_k y - \sin\beta_1\lambda_k \sin\beta_2\lambda_k y$, (1.19)

$\beta_1 \sin\beta_2\lambda_k \cos\beta_1\lambda_k - \beta_2 \sin\beta_1\lambda_k \cos\beta_2\lambda_k = 0$; (1.20)

в) $F_k(y) = \cos\beta\lambda_k \,\mathrm{sh}\,\alpha\lambda_k \sin\beta\lambda_k y \,\mathrm{ch}\,\alpha\lambda_k y - \sin\beta\lambda_k \,\mathrm{ch}\,\alpha\lambda_k \cos\beta\lambda_k y \,\mathrm{sh}\,\alpha\lambda_k y$, (1.21)

$$\alpha \sin 2\beta\lambda_k - \beta\,\mathrm{sh}\, 2\alpha\lambda_k = 0. \qquad (1.22)$$

Функции $F_k(y)$ удовлетворяют следующему условию обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} \left(F_n' F_k' - \frac{a_{22}}{a_{11}} \lambda_n^2 \lambda_k^2 F_n F_k \right) dy = 0 \qquad (n \neq k) \qquad (1.23)$$

которое для изотропного случая совпадает с известным условием П. Ф. Папковича [3]. Условие (1.23) можно вывести, если обе части уравнения (1.9) умножить на $\lambda_n^2 F_n(y)$, вычесть то же уравнение с индексом n и умноженное на $\lambda_k^2 F_k(y)$, затем интегрировать обе части полученного выражения в пределах $[-1, +1]$ и учесть (1.10).

Напряжения σ_x, τ_{xy}, определяемые формулой (1.8), удовлетворяют условиям (1.5), (1.6), и если искать решение плоской задачи в классе затухающих функций, т. е. в (1.8) суммирование вести по корням трансцендентных уравнений (1.12)—(1.22) с положительной вещественной частью $\mathrm{Re}\,\lambda_k > 0$, то тем самым будет обеспечено затухание напряжений при удалении от торца $x = 0$. Используя метод работы [4], легко показать, что если искать *затухающее решение* в классе функций, включающем как затухающие, так и незатухающие функции, то корням $\mathrm{Re}\,\lambda_k \leq 0$ будет соответствовать *незатухающее решение*. Перемещения будут затухающими, если $a = b = c = 0$. Выясним, при каких условиях оно будет выполняться.

В случае задачи I краевые значения напряжений должны удовлетворять условиям (1.5) и (1.6). В симметричной задаче условия (1.6) удовлетворяются тождественно, а из (1.5) следует

$$\int_0^1 f_1(y)\,dy = 0 \qquad (1.24)$$

в случае кососимметричной задачи (изгиб) тождественно удовлетворяется условие (1.5), а из (1.6) следует

$$\int_0^1 y f_1(y)\,dy = 0, \qquad \int_0^1 f_2(y)\,dy = 0. \qquad (1.25)$$

При выполнении условий (1.24), (1.25) напряжения будут затухающими, перемещения же будут определены с точностью жесткого смещения, но так как полоса под действием сил эквивалентной нулевой системы не может совершать движение как абсолютно твердое тело, то $a=b=c=0$, т. е. перемещения тоже будут затухающими.

2. В симметричной задаче $a=c=0$, а в кососимметричной $b=0$. В симметричном случае задачи 2 условия (1.5) и (1.6) непосредственно не налагают ограничения на значения $f_1(y)$. Удовлетворяя условиям (1.3), с учетом (1.8) имеем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(\frac{a_{11}}{\lambda_k}F_k'+a_{12}\lambda_k F_k\right)+b=f_1(y) \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\lambda_k F_k'=f_2(y),$$

где функции $F_k(y)$ задаются по одной из формул (1.11)—(1.15). Интегрируя второе уравнение (2.1) в пределах $[0, y]$, подставляя в первое и интегрируя полученное уравнение в пределах $[-1, +1]$, получаем

$$b=\int_0^1 f_1(y)dy-a_{12}\int_0^1 yf_2(y)dy, \tag{2.2}$$

если

$$\int_0^1 f_1(y)dy-a_{12}\int_0^1 yf_2(y)dy=0, \tag{2.3}$$

то как напряжения, так и перемещения будут иметь затухающий характер. Решение (1.8) будет решением типа погранслоя [4]. Используя обобщенную ортогональность (1.23), из (2.1) находим

$$A_k=\frac{\lambda_k}{\Delta_k}\int_0^1\left[F_k'\psi(y)-\frac{a_{22}}{a_{11}}\lambda_k^2F_k\varphi(y)\right]dy, \tag{2.4}$$

где

$$\Delta_k=\int_0^1\left[(F_k')^2-\frac{a_{22}}{a_{11}}\lambda_k^4F_k^2\right]dy, \tag{2.5}$$

$$\varphi(y)=\int_0^y f_2(y)dy-\int_0^1 f_2(y)dy, \qquad \psi(y)=-\frac{1}{a_{11}}[f_1(y)+a_{12}\varphi(y)] \tag{2.6}$$

и, следовательно, само решение (1.8).

В случае кососимметричной задачи 2 одно условие, накладываемое на граничную функцию, непосредственно вытекает из (1.6)

$$\int_0^1 f_2(y)dy = 0, \tag{2.7}$$

а удовлетворение условиям (1.3) дает

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{a_{11}}{\lambda_k} F_k'' + a_{12}\lambda_k F_k\right) + ay = f_1(y), \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k F_k' = f_2(y),$$

где $F_k(y)$ задается по одному из формул (1.17)—(1.21).

Интегрируя второе уравнение (2.8) в пределах $[0, y]$, подставляем результат в первое, умножаем его на y, затем интегрируя в пределах $[-1, +1]$, находим

$$\frac{2}{3}a = 2\int_0^1 y f_1 dy - a_{12}\int_0^1 y^2 f_2\, dy, \tag{2.9}$$

если

$$2\int_0^1 y f_1(y)dy - a_{12}\int_0^1 y^2 f_2(y)dy = 0; \tag{2.10}$$

то $a=0$ значение же «с» не зависит от граничных условий (1.3); исключив это жесткое смещение получим $c=0$. Таким образом, условия (2.7) и (2.10) необходимы ([3]) и достаточны, чтобы напряжения и перемещения были затухающими. Указанное затухающее решение опять найдем по формулам (1.8), (2.4) в последней

$$\varphi = \int_0^y f_2(y)dy, \tag{2.11}$$

3. В симметричной задаче 3 условие (1.5) налагает на функцию $f_1(y)$ ограничение

$$\int_0^1 f_1(y)dy = 0, \tag{3.1}$$

кроме того, из (1.4) и (1.8) следует, что значение числа «b» не зависит от условий (1.4). Исключив жесткое смещение, получим $b=0$, т. е. условие (3.1) является достаточным для возникновения затухающего напряженно-деформированного состояния.

В кососимметричном случае получаем одно ограничение из условий (1.6)

$$\int_0^1 y f_1(y)dy = 0. \tag{3.2}$$

Подчиняя (1.8) условиям (1.4), после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k F_k(y) = \varphi(y), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k^2} F_k'' - \frac{cy}{a_{11}} = \psi(y), \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_1(y) = \int_0^y f_1(y)dy - \int_0^1 f_1 dy, \qquad \varphi(y) = \int_0^y \varphi_1(y)dy \tag{3.4}$$

$$\psi(y) = \int_0^y \psi_1(y)dy, \qquad \psi_1(y) = -\frac{1}{a_{11}}\left[f_2(y) + (a_{12}+a_{66})\varphi_1(y) \right]$$

Из второго уравнения (3.3), умножая обе части на y и интегрируя в пределах $[-1, +1]$, находим

$$c = -3a_{11} \int_0^1 y\psi(y)dy, \tag{3.5}$$

$c=0$, если правая часть (3.5) обращается в нуль. С учетом (3.4) этому условию можно придать вид:

$$(a_{12} + a_{66}) \int_0^1 y^3 f_1(y)dy + 3\int_0^1 (1-y^2) f_2(y)dy = 0. \tag{3.6}$$

Значение a не зависит от условий (1.4). Исключая жесткое смещение, получаем $a=0$. Таким образом, при соблюдении условий (3.2) и (3.6) будет обеспечено существование затухающего решения. Эти условия являются и необходимыми. Из (3.3), учитывая (1.23), следует

$$A_k = \frac{\lambda_k^2}{\Delta_k} \int_0^1 \left[\psi(y) F_k''(y) - \frac{a_{22}}{a_{11}} \lambda_k^2 \varphi(y) F_k(y) \right] dy. \tag{3.7}$$

По формуле (3.7) определяется и произвол симметричной задачи с той разницей, что

$$\varphi_1(y) = \int_0^y f_1(y)dy, \qquad \varphi(y) = \int_0^y \varphi_1 dy - \int_0^1 \varphi_1 dy. \tag{3.8}$$

В заключение заметим, что выведенные выше условия соответствуют плоскому напряженному состоянию, от них, известной заменой упругих коэффициентов a_{ij} на $\beta_{ij} = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3})/a_{33}$, $(i, j = 1, 2, 6)$ получаются условия, соответствующие плоской деформации. Для изотропного случая они совпадают с условиями, выведенными М. И. Гусейн-Заде [3,5].

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Հ. Մ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Պ. Ֆ. Պապկովիչի ընդհանրացված օրթոգոնալությունը և օրթոտրոպ կիսաշերտի համար հարթ խնդրում մարող լուծումների գոյության պայմանները

Արտածված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում օրթոտրոպ կիսաշերտում, որի երկայնական կողմերն ազատ են լարումներից, իսկ ուղղաձիգ կողի վրա դրված են տարբեր տիպի պայմաններ, կառաջանան մարող լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակներ։ Խառն եզրային պայմանների դեպքում, աշխատանքում արտածված բանաձևերով կարելի է միաժամանակ որոշել նշված մարող լուծումները։ Նրանք ներկայացվում են այնպիսի ֆունկցիաներով, որոնք բավարարում են Պ. Ֆ. Պապկովիչի տիպի օրթոգոնալության պայմանի։ Ընդհանրացվում է Պ. Ֆ. Պապկովիչի օրթոգոնալության պայմանն օրթոտրոպ մարմնի հարթ խնդրում օգտագործվող ֆունկցիաների համար։

Արտածված մարման պայմանները կարող են օգտագործվել ինչպես հարթ խնդիրներում հիմնական և սահմանային շերտի տիպի լուծումների կառուցման ժամանակ, այնպես էլ անիզոտրոպ սալերի և թաղանթների ճշգրտված տեսություններում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Лехницкий.* Анизотропные пластинки, Гостехиздат, М., 1957. [2] *П. Ф. Папкович,* ДАН СССР, т. 27, № 4 (1940). [3] *М. И. Гусейн-Заде,* ПММ, т. 29, вып. 4 (1965). [4] *Л. А. Агаловян,* «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. 26, № 2 (1973). [5] *М. И. Гусейн-Заде,* ПММ, т. 29, вып. 2 (1965).