ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 3

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Н. И. Вишнякова, С. Д. Берман

О модулях над ненетеровыми кольцами нормирования

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 15/II 1975)

Кольцом нормирования называют коммутативное кольцо R с единицей, удовлетворяющее условию: если a, b—любые элементы кольца, то a делит b или b делит a. Целостным кольцам нормирования большое место уделено в [1].

Кольцо нормирования является арифметическим локальным кольцом. В дальнейшем буквами R и V всегда будут обозначаться кольцо нормирования и его максимальный идеал. В этой статье рассматриваются только кольца R с неглавным идеалом V. Это обстоятельство мы в дальнейшем не будем особо оговаривать. Все модули над кольцом R предполагаются унитарными.

Кольцо нормирования R назовем кольцом счетного типа, если каждый идеал кольца R представляется в виде объединения счетной неубывающей последовательности главных идеалов.

Теорема 1. *Кольцо нормирования с не более чем счетным спектром имеет счетный тип.*

Если $I \neq 0$—идеал в R, то стабилизатором $S(I)$ идеала I называется подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R, состоящая из всех таких элементов $a \in R$, что $aI = I$. Нетрудно показать, что $R \setminus S(I)$ есть простой идеал $P = P(I)$ кольца R.

Пусть $P \neq 0$—простой идеал кольца R. Идеал $I \neq 0$ в R назовем P—главным, если гомоморфный образ I в кольце частных R_p есть главный идеал кольца R_p.

Пусть M—R—модуль и x—ненулевой элемент модуля M. Положим $H(x) = \{r \in R,\ ry = x,\ y \in M\}$. Идеал $W(x) = \bigcap_{r \in H(x)} (r)$ назовем высотой элемента x.

Теорема 2. *Пусть $I \subseteq V$—идеал и $a \in I$, $a \neq 0$. Тогда $W(a) \cdot I = a \cdot P(I)$, где $W(a)$—высота элемента a в R—модуле I.*

С помощью теоремы 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть I, J—ненулевые идеалы кольца R и $P(J) = P$*

Идеал I делится на идеал J в мультипликативной полугруппе идеалов кольца R тогда и только тогда, когда $S(J) \subseteq S(I)$ и при этом J есть P—главный идеал, когда I является P—главным идеалом.

Кольцо R называется примарным, если максимальный идеал V есть единственный ненулевой простой идеал кольца. Естественный класс примарных колец дают локально локальные кольца R, которые представляются в виде объединения строго возрастающей последовательности подколец $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$, удовлетворяющих условиям: 1) $1 \in R_i$, и все ненулевые идеалы кольца R_i суть степени главного идеала $(p_i) \neq R_i$; 2) $R_{i+1}p_i \neq R_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Из общей теоремы 3 для примарного кольца R вытекает, что если I, J—неглавные идеалы кольца и $I \subseteq J$, то $I = J \cdot L$, где L—идеал в R.

Рассмотрим следующие три известные полугруппы: Q_0—аддитивная полугруппа всех неотрицательных вещественных чисел; Q_1—все вещественные числа отрезка $[0,1]$ с операцией $ab = \min(a + b, 1)$; Q_2—все вещественные числа отрезка $[0,1]$ и символ ∞ с операцией $ab = a + b$, если $a + b < 1$ и $ab = \infty$, если $a + b > 1$.

Теорема 4. *Пусть R—примарное кольцо, а Q—мультипликативная полугруппа неглавных идеалов кольца. $Q_1 \cong Q_0$, если R—целостное кольцо; $Q \cong Q_1$ $(Q_1 \cong Q_2)$, если R—нецелостное кольцо, не содержащее (содержащее) минимальный ненулевой идеал.*

Теорема 5. *Пусть R—примарное кольцо, $\bar{Q}$—полугруппа всех идеалов кольца, а Q—полугруппа всех неглавных идеалов кольца. Тогда соответственно имеет место такой эпиморфизм $\bar{Q} \to Q_i$ $(i = 0, 1, 2)$, что прообраз каждого элемента $x \in Q_i$ в $\bar{Q}$ есть либо неглавный идеал, либо пара $\{(a), aV\}$ из главного идеала (a) и максимального в нем идеала aV (см. теорему 4).*

Элемент $a \in R$ называется регулярным, если его аннулятор равен нулю. Будем говорить, что ненулевые идеалы I, J кольца R принадлежат к одному классу (к одному регулярному классу), если существуют такие элементы $a, b \in R$ (такие регулярные элементы $a, b \in R$), что $aI = bJ \neq 0$ $(aI = bJ)$. Нулевой идеал всегда образует регулярный класс. Введем дополнительное соглашение, что нулевой идеал образует также класс идеалов.

Ненулевые идеалы I из одного класса имеют один и тот же стабилизатор и, следовательно, для этих идеалов совпадают простые идеалы $P(I)$.

Кольцо нормирования R назовем кольцом первого рода, если все его регулярные элементы обратимы.

R—модуль $M \neq 0$ называется локально циклическим, если каждый его конечно порожденный подмодуль цикличен. Локально циклический модуль M назовем регулярным, если он содержит элемент с нулевым аннулятором.

Каждый фактор-идеал I/J (фактор) кольца R является локально циклическим модулем.

Если M — локально циклический модуль, то ненулевые аннуляторы I всех его ненулевых элементов лежат в одном классе идеалов. Этим идеалам соответствует один и тот же простой идеал $P(I)$, который мы будем обозначать через $P(M)$.

R — модуль $M \neq 0$ называется делимым, если для каждого элемента $x \in M$, $x \neq 0$ и любого элемента $r \in R$, такого, что $Ann\, r \subseteq Ann\, x$, существует элемент $y \in M$, для которого $ry = x$.

Теорема 6. *Пусть M произвольный локально циклический модуль, $u \in M$, $u \neq 0$, $I = Ann\, u$, $W = W(u)$ — высота элемента u в M, $P = P(M)$. Если $Ann\, M$ не является P — главным идеалом или если $Ann\, M$ и I суть P — главные идеалы, то $Ann\, M = I \cdot W$. В остальных случаях $I \cdot W = P \cdot Ann\, M$.*

Теорема 6 является аналогом теоремы Лагранжа для конечных групп.

В нижеследующих теоремах 7, 8, 9, 10, 11 кольцо R предполагается кольцом счетного типа.

Теорема 7. *Каждый локально циклический модуль либо изоморфен фактору I/J, либо делим. Фактор $M = I/J$ делим тогда и только тогда, когда R — кольцо первого рода и M либо свободный циклический модуль, либо фактор R/J, где $J = Ann\, V$.*

Теорема 8. *Каждый делимый регулярный локально циклический модуль изоморфен полному кольцу частных кольца R. Нерегулярный делимый локально циклический модуль M с точностью до изоморфизма определяется классом $\bar{Q}_1$ аннуляторов его ненулевых элементов. Класс идеалов $\bar{Q}_1 = \{I\}$, $I \neq 0$ тогда и только тогда соответствует некоторому нерегулярному делимому локально циклическому модулю M, когда стабилизатор $S(I)$ содержит все регулярные элементы кольца и идеалы I не являются аннуляторами элементов кольца R.*

Теорема 9. *Каждый регулярный локально циклический модуль изоморфен либо идеалу кольца R, либо полному кольцу частных кольца R. Идеалы кольца R изоморфны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному регулярному классу.*

Теорема 10. *Пусть M — делимый нерегулярный локально циклический модуль. Тогда $Ann\, M = Ann\, P$, где $P = P(M)$.*

Теорема 11. *Каждый точный нерегулярный локально циклический модуль делим. Делимый нерегулярный локально циклический модуль M точен тогда и только тогда, когда $P(M) = A$, где A — идеал R, состоящий из всех его нерегулярных элементов, и $Ann\, A = 0$.*

R — модуль M назовем вполне разложимым, если M разлагается в прямую сумму локально циклических модулей.

Теорема 12. *Кольцо эндоморфизмов локально циклического модуля локально.*

Следствием теоремы 12 и общих теорем об изоморфизмах прямых разложений модулей ([3], [4]) является

Теорема 13. *Любые два разложения вполне разложимого модуля M в прямые суммы локально циклических модулей изоморфны. Если N прямое слагаемое вполне разложимого модуля M, то N вполне разложим и локально циклические прямые слагаемые N изоморфны некоторым прямым слагаемым модуля M.*

Пусть $M=\{a, b\}$ — модуль с двумя образующими, $I_1 = Ann\,a$, $I_2 = Ann\,b$, $I_1 \subseteq I_2$. Тогда M можно рассматривать, как точный модуль над кольцом R/I_1. Поэтому классификация всех модулей M с двумя образующими сводится к обозрению всех точных модулей с двумя образующими.

Пусть M точный модуль с двумя образующими. Идеал $J \subseteq R$, являющийся объединением всех идеалов I, для которых подмодуль IM локально цикличен, назовем инвариантом модуля M. Если для всех идеалов $I \neq 0$ модуль IM не локально цикличен, то будем считать, что инвариант $J=0$.

Теорема 14. *Пусть M-точный нециклический модуль с двумя образующими и инвариантом J. Модуль M свободен тогда и только тогда, когда $J=0$. Все модули M с ненулевым инвариантом J задаются автоморфизмами φ идеала J вида $\varphi(t) = \theta_t t$, где $t \in J$, θ_t — единица R. Модули M и M' соответствующие автоморфизмам φ и φ' изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая обратимая матрица $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$, что $(\gamma_{11} - \gamma_{12}\theta_t)\theta'_t = \gamma_{21} + \gamma_{22}\theta_t \pmod{Ann\,t}$ для всех $t \in J$.*

Теорема 15. *Пусть M нециклический точный R—модуль с двумя образующими и ненулевым инвариантом J. Если J—главный, регулярный или нерегулярный, но A—главный идеал (A—идеал R, состоящий из всех его нерегулярных элементов), то модуль M разложим. Если R—счетное кольцо, то существует континуум попарно неизоморфных модулей M, соответствующих нерегулярному, неглавному и не A—главному идеалу J, и среди них точно один разложимый.*

Главным циклическим модулем условимся называть циклический модуль, аннулятор которого является главным идеалом кольца R.

R—модуль назовем периодическим, если все элементы модуля имеют ненулевые аннуляторы.

Рядом Ульма периодического R—модуля M назовем трансфинитный ряд подмодулей:

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{\nu-1} \supseteq M_\nu = 0$$

со следующими свойствами: 1) Если $i < \nu$—порядковое число, то фактор модуль M_i/M_{i+1} разлагается в прямую сумму не более чем счетного числа главных циклических модулей; 2) Пусть $i < \nu$—порядковое число, а (γ)—аннулятор произвольного ненулевого элемента модуля

M_i/M_{i+1}. Если $a \neq 0$ — любой элемент модуля M_{i+1}, то существует такой необратимый элемент $\delta \in R$, что $\delta x = a$, где $x \in M_i$; 3) для порядкового числа $i < \nu$ второго рода $M_i = \bigcap_{j<i} M_j$; 4) если элемент $x \in M$ удовлетворяет условиям: $x \in M_i$, $x \notin M_{i+1}$, то назовем i типом элемента x. Различные типы ненулевых элементов любого конечно порожденного подмодуля $X \subseteq M$ образуют конечное множество порядковых чисел.

Факторы M_i / M_{i+1} будем называть ульмовскими факторами модуля M, а ν — типом ряда Ульма.

Теорема 16. *Пусть периодические модули M и M' обладают рядами Ульма одного и того же типа ν и соответствующие ульмовские факторы M_i / M_{i+1} и M'_i/M'_{i+1} изоморфны для каждого $i < \nu$. Тогда модули M и M' изоморфны.*

Теорема 17. *Пусть R — область целостности, ν — порядковое число не более чем счетной мощности и для каждого трансфинитного числа i, $0 \leq i < \nu$ задан периодический R — модуль G_i, разлагающийся в прямую сумму не более чем счетного числа главных циклических модулей: $G_i = (u_{i1}) + (u_{i2}) + \ldots$, причем для всех i, кроме, быть может, числа $i = \nu - 1$ при непредельном ν, среди аннуляторов (ε_{ij}) модулей (u_{ij}) нет такого, который делится на все остальные. Тогда существует R — модуль M, обладающий рядом Ульма, факторы которого соответственно изоморфны модулям G_i.*

В заключение приведем теоремы о связи делимых локально циклических модулей с вопросами инъективности. Пусть R — кольцо счетного типа. Будем говорить, что модуль M принадлежит классу (L), если M имеет счетное число образующих и каждый конечно порожденный подмодуль модуля M разлагается в прямую сумму циклических модулей.

R — модуль M из класса (L) назовем инъективным в этом классе, если всякая точная последовательность $0 \to M \to N$, где N — модуль класса (L), расщепляема.

Теорема 18. *Каждый делимый R — модуль из класса (L) разлагается в прямую сумму конечного или счетного числа делимых локально циклических модулей:*

$$M = D_1 + D_2 + \ldots \tag{1}$$

Назовем кольцо нормирования R специальным, если пересечение C всех его ненулевых простых идеалов равно нулю, или не является идемпотентным идеалом.

Теорема 19. *Модуль M класса (L) является неразложимым инъективным в этом классе модулем тогда и только тогда, когда M делимый локально циклический модуль. Всякий инъективный в классе (L) модуль разлагается в прямую сумму делимых локально циклических модулей вида (1). Конечная прямая сумма (1) всегда инъективна в классе (L). Счетная прямая сумма (1) инъективна в* классе (L) тогда и только тогда, когда R специальное кольцо нормирования, пересечение всех простых идеалов $P_i = P(D_i), \ldots$, соответствующий модулям D_i с кручением, равно идеалу C причем при $C=0$ и для каждого простого идеала $P_i \neq C$ существует только конечное число идеалов $P_j \supseteq P_i$, а при $C \neq 0$ имеется только конечное число модулей D_i с $P_i \neq C$.

Кольцо нормирования R называется почти максимальным, если для любого семейства идеалов $\{I_\alpha\}$ кольца R, такого что $\cap I_\alpha \neq 0$ система сравнений $x \equiv x_\alpha \pmod{I_\alpha}$ $(x_\alpha \in R)$ всегда имеет в R решение, если совместны любые два сравнения системы.

В ([5]) показано, что каждый неразложимый инъективный модуль над почти максимальным кольцом нормирования локально цикличен.

Теорема 20. *Пусть R почти максимальное кольцо нормирования. Модуль M является неразложимым инъективным тогда и только тогда, когда M делимый локально циклический модуль. Все инъективные R-модули, разложимые в прямую сумму неразложимых модулей, исчерпываются конечными прямыми суммами делимых локально циклических модулей и такими их бесконечными прямыми суммами (в случае специального кольца R), которые удовлетворяют условиям теоремы 19 без предположения о счетности числа слагаемых.*

Харьковский институт радиоэлектроники.

Харьковский сельскохозяйственный институт им. В. В. Докучаева

Լ. Ի. ՎԻՆՅԱԿՈՎԱ, Ս. Դ. ԲԵՐՄԱՆ

Ոչ նյոթերյան նորմավորման օղակների վրա մոդուլների մասին

Դիտարկվում են ոչ գլխավոր մաքսիմալ V իդեալով մոդուլներ, որոնք որոշված են նորմավորման R օղակների վրա, այնպիսիք, որ ցանկացած R իդեալ հանդիսանում է գլխավոր իդեալների հաշվելի չնվազող հաջորդականության միավորում։

Ստացված են ինվարիանտների լրիվ սիստեմները լոկալ ցիկլիկ R մոդուլների համար։ Ապացուցված են նաև թեորեմներ լոկալ ցիկլիկ մոդուլների ուղղակի գումարների համար։ Մասնավորապես ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 18. Ցանկացած բաժանելի R-մոդուլ $\{L\}$ դասից վերածվում է վերջավոր կամ հաշվելի թվով բաժանելի լոկալ ցիկլիկ մոդուլների ուղղակի գումարի:

$$M = D_1 + D_2 + \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Бурбаки*, Коммутативная алгебра, „Мир", М. 1973. [2] *G. Azumaya*, Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Schmidt theorem, Nagoya Math. J. 117–124, 1950. [3] *R. Swan*, Algebraic K-theory, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 76. [4] *R. B. Warfield*, Krul-Schmidt theorem for infinite sumes of modules, Proc. Amer. Math. Soc. 22, № 2, 460–465 (1969). [5] *D. Gill*, Almost maximal valuation rings., J. London Math. Soc., 4, № 1, 140–149 (1971).