УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе смещениях

(Представлено чл.-корреспондентом АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 16/X 1974)

В предыдущей статье автора (1) рассматривалась первая основная задача плоской теории упругости для односвязных областей с углами. Настоящая статья посвящена второй основной задаче для тех же областей.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L . Положим, что $a_j (j = 1, 2, \dots, m)$ угловые точки контура, отличные от точек поворота.

Следуя (1), бигармоническую функцию $U(x, y)$ будем искать в виде

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} U_j(x, y), \quad (1.1)$$

где

$$2U_0(x, y) = \chi(z) + \overline{\chi(z)} + z\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)}, \quad (1.2)$$

$$U_j(x, y) = \gamma_{1j}(z - a_j) + \gamma_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) + (\bar{z} - \bar{a}_j)\varphi_{1j}(z - a_j) + (z - a_j)\varphi_{2j}(\bar{z} - \bar{a}_j) \quad (1.3)$$

Полагая, что в (1.3)

$$\gamma_{1j}(z - a_j) = d_{1j}(z - a_j)^{\nu_j + 1}, \quad \gamma_{2j}(z - a_j) = d_{2j}(z - a_j)^{\nu_j + 1},$$

$$\varphi_{1j}(z - a_j) = d_{3j}(z - a_j)^{\nu_j}, \quad \varphi_{2j}(z - a_j) = d_{4j}(z - a_j)^{\nu_j} \quad \text{и} \quad z - a_j = r_j e^{i\theta_j}, \quad (1.4)$$

придем к представлению бигармонической функции $U_j(x, y)$ в полярных координатах:

$$U_j(r_j, \theta_j) = r_j^{\nu_j + 1} [b_{1j} \sin(\nu_j + 1)\theta_j + b_{2j} \cos(\nu_j + 1)\theta_j + b_{3j} \sin(\nu_j - 1)\theta_j + b_{4j} \cos(\nu_j - 1)\theta_j] \quad (1.5)$$

где

$$b_{1j} = i(d_{1j} - d_{2j}), \quad b_{2j} = d_{1j} + d_{2j},$$

$$b_{3j} = i(d_{3j} - d_{4j}), \quad b_{4j} = d_{3j} + d_{4j}. \quad (1.6)$$

i — мнимая единица.

Известно ⁽²⁾, что производные компонентов вектора смещения по направлениям декартовых осей x и y определяются по формулам

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (1-\nu)\Delta U, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-\nu)\Delta U, \quad (1.7)$$

где $\nu = \nu$ при плоской деформации и $\nu = \nu/(1+\nu)$ при обобщенном плоско-напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона, Δ — оператор Лапласа, μ — модуль сдвига.

Подставляя (1.1) в (1.7), получаем

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + (1-\nu)\Delta U_0 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Re} U_j + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \Delta \operatorname{Re} U_j \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + (1-\nu)\Delta U_0 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} U_j + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \Delta \operatorname{Re} U_j. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначая, следуя ⁽³⁾

$$\Delta U_0 = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y} \quad (1.9)$$

и, имея в виду ⁽²⁾,

$$\Delta \operatorname{Re} U_j = \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}, \quad (1.10)$$

где p и q сопряженные гармонические функции голоморфной в S функции $\varphi(z) = p + iq$, h_j — гармоническая функция, (1.8) перепишем так

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + 4(1-\nu) \frac{\partial p}{\partial x} - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}, \\ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 4(1-\nu) \frac{\partial q}{\partial y} - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h_j}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Интегрируя первое из уравнений (1.11) по x , а второе по y , отбрасывая при этом члены выражающие только жесткое смещение всего тела, с учетом (1.1), получаем

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}\right) + 4(1-\nu)\varphi(z) + (1-\nu) \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial h_j}{\partial y} + i \frac{\partial h_j}{\partial x}\right). \quad (1.12)$$

Далее, полагая $z - a_j = r_j e^{i\theta_j}$, введем новые обозначения ⁽³⁾

$$\frac{\partial h_j}{\partial y} = r_j e^{i\theta_j} \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j}, \quad \frac{\partial h_j}{\partial x} = r_j^2 e^{i\theta_j} \frac{\partial g_j}{\partial r_j}. \quad (1.13)$$

Как показано в ⁽³⁾, гармоническая функция $g_j(r_j, \theta_j)$ связана с бигармонической функцией $\operatorname{Re} U_j$ соотношением

$$\Delta \operatorname{Re} U_j = \frac{\partial}{\partial r_j} \left(r_j \frac{\partial g_j}{\partial \theta_j} \right). \quad (1.14)$$

Учитывая (1.13) переходя в (1.12) от дифференцирования по x , y , r_j и θ_j к дифференцированию по z и $\bar{z}$, получаем

$$2\mu(u + iv) = -2 \frac{\partial U}{\partial z} + 4(1-\sigma)\varphi(z) + 2i(1-\sigma) \sum_{j=1}^m (z-a_j)^{\lambda_j} \frac{dg_j}{dz}. \quad (1.15)$$

Функцию g_j будем искать в виде (4)

$$g_j = \operatorname{Re} [A_j(z-a_j)^m + B_j(\bar{z}_j - \bar{a}_j)^m]. \quad (1.16)$$

На основании (1.3), (1.4) и (1.14)

$$A_j = -\frac{4i}{\lambda_j - 1} d_{1j}, \quad B_j = \frac{4i}{\lambda_j - 1} d_{2j}, \quad m = \lambda_j - 1. \quad (1.17)$$

Имея в виду соотношение

$$2i(z-a_j)^{\lambda_j} \frac{\partial g_j}{\partial z} = 4[\varphi_{1j}(z-a_j) + \bar{\varphi}_{2j}(z-a_j)] \quad (1.18)$$

справедливость которого легко проверить с помощью (1.16), (1.17) и (1.4), подставляя (1.1) в (1.15) и устремляя z к точке контура t , получаем

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \sum_{j=1}^m |x\varphi_j(t) - (t-a_j)\overline{\varphi_j(t)} - \overline{\psi_j(t)}|, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \varphi_{1j}(z-a_j) + \bar{\varphi}_{2j}(z-a_j), \\ \psi_j(z) &= \psi_{1j}(z-a_j) + \bar{\psi}_{2j}(z-a_j). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \varphi(z) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(z), \\ \psi^*(z) &= \psi(z) + \sum_{j=1}^m \left\{ \psi_j(z) - \bar{a}_j \varphi_j(z) \right\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

граничное условие (1.19) перепишем в известном виде (3)

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi^*(t) - t\overline{\varphi^{*'}(t)} - \overline{\psi^*(t)}. \quad (1.22)$$

Представление (1.1) основано на предположении, что в окрестности угловой точки a_j , в которой сходятся дуги L_{j-1} и L_j , поведение напряжений и смещений совпадает с поведением этих же величин в окрестности вершины сектора, образованного касательными, проведенными к контуру L в той же точке a_j . Поэтому, следуя Вильямсу (4), удовлетворяя с помощью (1.5) однородным условиям для смещений на прямолинейных сторонах сектора $\theta_j = \alpha_j$ и $\theta_j = \beta_j$, полагая, что $0 < \beta_j - \alpha_j \leq 2\pi$, учитывая при этом (1.14), (1.16), (1.17) и (1.6), получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, \dots, m$). Требо-

влияние наличия нетривиального решения этой системы приводит к характеристическому уравнению относительно λ_j :

$$\lambda^2 \sin^2 \nu_j (\beta_j - \alpha_j) = \lambda_j^2 \sin^2 (\beta_j - \alpha_j). \quad (1.23)$$

Учитывая, что ранг матрицы указанной однородной системы равен трем, нетривиальные решения системы имеют вид

$$b_{1j} = X_{1j} b_{4j}, \quad b_{2j} = X_{2j} b_{4j}, \quad b_{3j} = X_{3j} b_{4j}, \quad (1.24)$$

где

$$\Delta X_{1j} = -(\lambda + \lambda_j) \{ \lambda \sin [(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] + \lambda_j \sin [(\nu_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] + (\lambda - \lambda_j) \sin (\nu_j + 1)\beta_j \},$$

$$\Delta X_{2j} = -(\nu_j + 1) (\lambda + \lambda_j) \{ (\lambda - \lambda_j) \cos (\nu_j + 1)\beta_j - \lambda \cos [(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] + \lambda_j \cos [(\nu_j - 1)\beta_j + 2\alpha_j] \},$$

$$\Delta X_{3j} = (\nu_j + 1) \{ \lambda \sin [(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] - \lambda_j \sin [(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] + (\lambda + \lambda_j) \sin (\nu_j - 1)\beta_j \},$$

$$\Delta = (\nu_j + 1) \{ (\lambda + \lambda_j) \cos (\nu_j - 1)\beta_j - \lambda \cos [(\nu_j - 1)\beta_j - 2\alpha_j, \nu_j] - \lambda_j \cos [(\nu_j + 1)\beta_j - 2\alpha_j] \}.$$

Для выделения особого решения, связанного с наличием угловой точки контура a_j , в дальнейшем, под ν_j будем подразумевать корень уравнения (1.23) с наименьшей положительной действительной частью.

Учитывая (1.20), (1.4), (1.6) и (1.24), граничное условие (1.19) представим в виде

$$z \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} - 2\pi(u + iv) = \sum_{j=1}^n \left\{ b_{1j} \tilde{\varepsilon}_j(t) + \overline{b_{1j}} \tilde{\eta}_j(t) \right\}, \quad (1.25)$$

где

$$2\tilde{\varepsilon}_j(t) = \lambda(1 - iX_{3j})(t - a_j)^{\lambda_j} - (1 + iX_{3j})\nu_j(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\nu_j - 1} - (\nu_j + 1)(X_{2j} + iX_{1j})(\bar{t} - \bar{a}_j)^{\nu_j},$$

$$2\tilde{\eta}_j(t) = \lambda(1 - i\bar{X}_{3j})(t - a_j)^{-\lambda_j} - (1 + i\bar{X}_{3j})\bar{\nu}_j(t - a_j)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{-\bar{\nu}_j - 1} - (\bar{X}_{2j} + i\bar{X}_{1j})(\bar{\nu}_j + 1)(\bar{t} - \bar{a}_j)^{-\bar{\nu}_j}.$$

Для решения поставленной задачи, необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m комплексных постоянных b_{4j} из условия (1.25).

2. Будем искать функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в виде (*)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\lambda \omega(\tau)} + \tau \overline{\omega'(\tau)}}{\tau - z} d\tau. \quad (2.1)$$

где $\omega(z)$ — подлежащая определению непрерывная комплексная функция точки границы, имеющая интегрируемую производную. На основании результатов, приведенных в монографии (*), представления (2.1) возможны и в случае кусочно-гладкого контура интегрирования.

Подставляя предельные значения (2.1) в граничное условие (1.25), учитывая при этом, что в узлах a_j линии L функциям $\varphi(t)$, $\bar{\varphi}(t)$, приписаны предельные значения соответственно функций $\varphi(z)$, $\bar{\varphi}(z)$, когда точка z стремится к a_j по дугам L_{j-1} и L_j , причем, как это следует из (1.25) эти предельные значения каждой из этих функций равны между собой, получим:

$$\begin{aligned} x\omega(t) + \frac{x}{2\pi i} \int_L \omega(z) d \ln \frac{z-t}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(z)} d \frac{z-t}{\bar{z}-\bar{t}} = \\ = 2\pi(u + iv) - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j} \bar{\xi}_j(t) + \overline{b_{1j}} \tau_j(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это уравнение является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауричелла для второй основной задачи плоской теории упругости на случай односвязной области с углами. Как показано в [1], ядра уравнения (2.2) в угловых точках контура имеют конечные разрывы, и следовательно, для уравнения (2.2) имеет место альтернатива Фредгольма.

Интегрируя граничное условие (1.25) или, что то же самое, уравнение (2.2) в пределах от a_k до a_{k+1} ($k=1, 2, \dots, m; a_{m+1}=a_1$), будем определять коэффициенты b_{1j} как функционалы из условий

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left\{ x\varphi(t) - t\bar{\varphi}'(t) - \bar{\psi}(t) \right\} d\bar{t} = 2\pi \int_{a_k}^{a_{k+1}} (u + iv) d\bar{t} - \sum_{j=1}^m \left\{ b_{1j} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \bar{\xi}_j(t) d\bar{t} + \right. \\ \left. + \overline{b_{1j}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tau_j(t) d\bar{t} \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Добавляя к этим уравнениям их комплексно сопряженные, получим систему алгебраических уравнений для определения функционалов b_{1j} . Определитель этой системы отличен от нуля, так как однородная система, получаемая из (2.3) при $u + iv = 0$, допускает только тривиальное решение, как это будет показано ниже. В случае действительности $\bar{t}$, действительные функционалы b_{1j} будем определять из действительной части (2.3). Можно показать, что функционалы b_{1j} могут иметь другие представления, отличные от определяемых по (2.3).

3. Докажем разрешимость уравнения (2.2). Покажем, что однородное уравнение

$$x\omega_0(t) + \frac{x}{2\pi i} \int_L \omega_0(\tau) d \ln \frac{\tau-t}{\tau-t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega_0(\tau)} d \frac{\tau-t}{\tau-t} = - \sum_{j=1}^m [b_{ij}^0 \xi_j(t) + \overline{b_{ij}^0} \eta_j(t)], \quad (3.1)$$

получаемое из (2.2) при $u+lv=0$ на всем L , не имеет решений, отличных от тривиального.

С этой целью обозначим функции, определяемые по (2.1), соответствующие плотности $\omega_0(\tau)$ через $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, функционалы b_{ij} через b_{ij}^0 и функции, определяемые по (1.21), через $\xi_j^0(z)$ и $\eta_j^0(z)$.

Учитывая эти обозначения и равносильность (1.19), (1.22), (1.25) и (2.2), уравнение (3.1) запишем в виде

$$x\varphi_0^*(t) - t\overline{\varphi_0^*(t)} - \psi_0^*(t) = 0, \quad (3.2)$$

На основании теоремы единственности (*) и условия (3.2) имеем

$$\varphi_0^*(z) = c, \quad \psi_0^*(z) = x\overline{c}. \quad (3.2)$$

Подставляя значения (3.3) в левую часть (1.21), с учетом (2.1), (1.20), (1.4), (1.6) и (1.24), получим:

$$c = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [(1-iX_{2j})(z-a_j)^{-i_j} b_{ij}^0 + (1+i\overline{X_{2j}})(z-a_j)^{-i_j} \overline{b_{ij}^0}],$$

$$x\overline{c} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L [x\overline{\omega_0(\tau)} + \overline{\tau}\omega_0(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-z} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [b_{ij}^0 | (i_j+1)(X_{2j}-iX_{1j})(z-a_j)^{-i_j} -$$

$$-i_j \overline{a_j} (1-iX_{2j})(z-a_j)^{-i_j-1} | + \overline{b_{ij}^0} | (i_j+1)(\overline{X_{2j}}-i\overline{X_{1j}})(z-a_j)^{-i_j} -$$

$$-a_j \overline{i_j} (1+i\overline{X_{2j}})(z-a_j)^{-i_j-1} |]. \quad (3.4)$$

Вследствие однозначности интегралов типа Коши, входящих в (3.4), заключаем, что

$$b_{ij}^0 = 0, \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.5)$$

откуда следует, что

$$c = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_0(\tau) d\tau}{\tau-z},$$

$$x\overline{c} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L [x\overline{\omega_0(\tau)} + \overline{\tau}\omega_0(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-z}. \quad (3.6)$$

Обозначая

$$i\delta(\tau) = \omega_0(\tau) - c$$

$$i\gamma(\tau) = -x\overline{\omega_0(\tau)} - \overline{\tau}\omega_0(\tau) - x\overline{c} \quad (3.7)$$

и имея в виду (3.6), легко видеть (*), что функции $\delta(z)$ и $\gamma(z)$ голоморфны вне S , причем $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$.

Исключая $\omega_0(\tau)$ из уравнений (3.7), получаем

$$x\delta(\tau) - \overline{\tau\delta'(\tau)} - \overline{\gamma(\tau)} = 2lxc, \quad (3.8)$$

Это уравнение является граничным условием плоской задачи теории упругости для области, составляющей внешность L , при заданных на границе смещениях.

На основании теоремы единственности (*) для второй основной задачи, а также условия (3.8) и равенства $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$, очевидно, что $\delta(z) = \gamma(z) = 0$, а следовательно, $c = 0$ и $\omega_0(z) = 0$.

Вышеизложенное с незначительными изменениями применимо к бесконечной односвязной области с углами.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ո. Ո. ՉԱՐՄԱԼՅԱՆ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ անկյուններով տիրույթի համար եզրում տված տեղափոխությունների ազդեցության տակ

նախորդ հոդվածում (*) առաջարկված էր մի եղանակ, առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծման համար, երբ միակապ անկյուններով տիրույթի եզրում տրված էին արտաքին լարումները: Այդ եղանակը տվյալ հոդվածում կիրառված է նույնպիսի տիրույթի համար, երբ եզրում տրված են տեղափոխությունները:

Անչատելով անկյունային կետերին համապատասխանող տեղական լուծումները, խնդրի լուծումը բերվում է մի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը հանդիսանում է Շերման-Լատրիշելլայի հավասարման ընդհանրացումը: Ապացուցվում է այդ հավասարման լուծելիությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ՉՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. С. Заргарян, ДАН Арм ССР, т LX, № 1 (1975). ² Э. Кокер и Л. Фаинг, Оптический метод исследования напряжений, Л.—М., 1936. ³ Н. Н. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. «Наука», М., 1968. ⁴ M. L. Williams, J. of Appl. Mech., vol. 19, № 4 (1952). ⁵ Л. Н. Шерман, ДАН СССР, т XXVIII, № 1 (1910). ⁶ Н. Н. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968. ⁷ С. Г. Михлин, Труды сейсмологического института АН СССР, № 65, 1935.