

УДК 513

МАТЕМАТИКА

М. А. Акивис, А. В. Чакмазян

Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства,
 допускающих параллельное нормальное векторное поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 2/II 1975)

1. В работе (1) рассматриваются подмногообразия V_m n -мерного пространства постоянной кривизны, допускающие параллельное нормальное векторное поле. Такие подмногообразия обладают рядом интересных геометрических свойств. Их частным случаем являются подмногообразия с параллельным полем векторов средней кривизны, которые интенсивно изучаются в последнее время (2).

В настоящей работе строится аффинное обобщение метрических результатов, полученных ранее (1). Мы изучаем здесь оснащенные подмногообразия V_m аффинного пространства A_n , допускающие параллельное нормальное векторное поле. Оказалось, что строение таких многообразий тесно связано со строением тангенциально вырожденных многообразий и многообразий, несущих сопряженную систему, которые были изучены одним из авторов (3-5).

2. Рассмотрим m -мерное подмногообразие V_m аффинного пространства A_n , оснащенное при помощи семейства $(n-m)$ -мерных нормалей первого рода N_x (6). Присоединим к рассматриваемому подмногообразию аффинный репер (x, e_u) , $u=1, \dots, n$, точка x которого совпадает с текущей точкой многообразия V_m . Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера запишутся в виде

$$dx = \omega^u e_u, \quad de_u = \omega_v^u e_v, \quad (u, v, w = 1, \dots, n) \quad (1)$$

в формы Пфаффа, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры группы аффинных преобразований

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u, \quad d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u \quad (2)$$

Поместим векторы e_i ($i=1, \dots, m$) подвижного репера в касательное пространство T_x многообразия V_m , а векторы e_α ($\alpha=m+1, \dots, n$) будем считать принадлежащими его нормали N_x . Тогда на многообразии V_m формы ω^i будут линейно независимыми и имеют место уравнения

$$\omega^* = 0, \quad (3)$$

$$\omega_i^* = b_{ij}^* \omega^j, \quad (4)$$

$$\omega_i^l = c_{ij}^l \omega^j, \quad (5)$$

где $b_{ij}^* = b_{ji}^*$. При этом уравнения (4) получаются при продолжении уравнений (3), и величины b_{ij}^* образуют систему асимптотических тензоров подмногообразия V_m , а уравнения (5) вытекают из условия инвариантности оснащающей нормали N_x . Величины c_{ij}^l также являются тензорами.

Формы ω_j^l определяют аффинную связность в касательном расслоении T_x подмногообразия V_m . Форма кривизны этой связности в силу уравнений (2), (4), (5) имеет вид:

$$d\omega_j^l - \omega_j^k \wedge \omega_k^l = b_{jk}^* c_{il}^k \omega^k \wedge \omega^l.$$

Отсюда следует, что тензор кривизны этой связности выглядит следующим образом:

$$R_{jkl}^i = b_{jk}^* c_{il}^k. \quad (6)$$

Формы ω_j^* определяют связность в нормальном расслоении N_x подмногообразия V_m . Форма кривизны этой связности в силу тех же уравнений имеет вид

$$d\omega_i^* - \omega_i^j \wedge \omega_j^* = c_{ji}^k b_{ik}^* \omega^j \wedge \omega^i,$$

а ее тензор кривизны выглядит так:

$$R_{jil}^* = c_{ji}^k b_{ik}^*. \quad (7)$$

Заметим, что если подмногообразие V_m является m -плоскостью, то $b_{ij}^* = 0$ и тензоры R_{jkl}^i , R_{jil}^* при любом оснащении этого подмногообразия обращаются в нуль. Если семейство нормалей N_x является абсолютно параллельным, то $c_{ij}^l = 0$ и тензоры кривизны снова обращаются в нуль. В дальнейшем эти случаи мы исключим из рассмотрения. Более того, в дальнейшем мы будем считать, что многообразие V_m является тангенциально невырожденным.

Семейство нормалей N_x образует конгруэнцию в A_n . Найдем фокальные образы ⁽²⁾ этой конгруэнции. Пусть $y = x + x^* e$, произвольная точка нормали N_x . Если эта точка является фокусом, то должно выполняться условие $dy \in N_x$. Отсюда вытекают соотношения

$$(\delta_j^i + x^* c_{ij}^i) \omega^j = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение относительно ω^i , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det(\delta_j^i + x^* c_{ij}^i) = 0. \quad (8)$$

Это уравнение определяет фокусную поверхность, принадлежащую нормали N_x , которая является алгебраической поверхностью порядка m размерности $n - m - 1$.

Отметим, что если тензор $c_{ij}^i = c_{ij}^j$, то уравнение (8) принимает вид

$$x^i c_{ij}^i + 1 = 0, \quad (9)$$

то есть фокусная поверхность вырождается в m -кратную $(n - m - 1)$ -плоскость. Нормали N_x образуют в этом случае связку, вершиной которой служит плоскость (9). Тензоры кривизны в этом случае имеют вид

$$R_{jkl}^i = c_{ij}^s b_{sk}^s \delta_{jl}^i, \quad R_{xll}^s = 0.$$

3. Рассмотрим на многообразии V_m нормальное векторное поле $\xi = \xi^i e_i$. Для этого поля имеем:

$$d\xi = (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i) e_i + \xi^i \omega_i^l e_l. \quad (10)$$

Выражение $D\xi = (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i) e_i$ представляет собой ковариантный дифференциал векторного поля по отношению к связности, определенной нормальным расслоением. Поле ξ называется параллельным векторным полем, если $D\xi = 0$.

Предположим теперь, что оснащенное подмногообразие V_m аффинного пространства A_n допускает параллельное нормальное векторное поле. Тогда уравнения

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = 0 \quad (11)$$

должны выполняться тождественно на V_m . Дифференцируя внешним образом эти уравнения, найдем

$$\xi^j \omega_j^i \wedge \omega_i^l = 0. \quad (12)$$

Введем тензор

$$c_j^i = \xi^s c_{sj}^i$$

и назовем его основным тензором параллельного нормального векторного поля ξ , присоединенного к многообразию V_m . Теперь, в силу (4) и (5), соотношения (12) можно переписать в виде

$$c_j^s b_{sk}^s = c_j^s b_{sk}^s. \quad (13)$$

Полагая $C = (c_j^i)$ и $B^s = (b_{ij}^s)$, это условие можно переписать в матричной форме

$$(B^s C)^* = B^s C, \quad (B^s)^* = B^s, \quad (14)$$

где $*$ означает транспонирование матрицы.

Условие (12), в силу (7) может быть также переписано в форме

$$\exists R_{ij}^* = 0,$$

причем последнее соотношение выполняется тождественно на V_m . Это означает, что параллельное векторное поле ξ принадлежит ядру алгебры голономии связности, определяемой в нормальном расслоении многообразия V_m .

Изучим теперь подробнее свойства параллельного нормального векторного поля многообразия V_m . Для этого докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Семейство одномерных нормалей, определяемых параллельным векторным полем ξ , образует тангенциально вырожденную поверхность V_{m+1} размерности $m+1$ ранга m .

Рассмотрим поверхность V_{m+1} , образованную нормалью $l_x = x\xi$ многообразия V_m . Пусть $y = x + \lambda\xi$ — произвольная точка этой поверхности. В силу уравнений (11), дифференциал этой точки имеет вид:

$$dy = (\omega^i + \lambda c_j^i \omega^j) e_i + d\lambda \cdot \xi. \quad (15)$$

Отсюда ясно, что касательное подпространство поверхности V_{m+1} в точке y определяется векторами e_i и ξ и не зависит от положения точки y на прямой l_x , а зависит только от положения точки x на поверхности V_m . Поэтому V_{m+1} является тангенциально вырожденной поверхностью ранга m (*).

В соответствии с работой (*) можно сказать, что оснащенное многообразие V_m , несущее параллельное векторное поле, допускает одномерную поднормализацию.

Многообразие V_m' называется параллельным оснащеному многообразию V_m аффинного пространства A_n , если касательная плоскость $T_{x'}$ к этому многообразию в точке $x' = N_x \cap V_m'$ параллельна касательной плоскости T_x . Многообразие V_m' является преобразованием Петерсона (**) многообразия V_m .

Теорема 2. Оснащенное многообразие V_m аффинного пространства A_n допускает параллельное нормальное векторное поле ξ тогда и только тогда, когда существует параллельное ему многообразие V_m' .

Предположим, что оснащенное многообразие V_m допускает нормальное векторное поле ξ . Рассмотрим многообразие V_m' описываемое точкой $x' = x + c\xi$, где $c = \text{const}$. Тогда, в силу (11),

$$dx' = (\omega^i + c\xi^a \omega_a^i) e_i,$$

то есть $T_{x'}$ параллельна T_x .

Обратно, пусть V_m' — многообразие, параллельное V_m в указанном выше смысле, описываемое точкой x' . Так как точки x и x' ле-

жат в одной плоскости N_x , то $x' = x + \xi$, где $\xi = \xi^i e_i$. Поэтому, в силу (10),

$$dx' = (\omega^i + \xi^i \omega^i) e_i + D\xi^i e_i.$$

Но так как T_x параллельно T_x , то $D\xi^i = 0$ и поле ξ является параллельным полем.

4. Найдем фокусы образующей поверхности V_{m+1}^m , порожденной параллельным нормальным векторным полем нормализованного многообразия V_m . Точка $y = x + \lambda \xi$ будет фокусом образующей l_x , если вектор dy параллелен вектору ξ . Из соотношения (15) следует, что для фокусов имеют место уравнения

$$(\delta_j^i + i c_j^i) \omega^j = 0.$$

Положим в этих уравнениях $i = -\frac{1}{\mu}$. Тогда они переписутся в виде

$$(c_j^i - \mu \delta_j^i) \omega^j = 0. \quad (16)$$

Значения параметров μ , определяющие фокусы на образующей l_x , находятся из уравнения

$$\det (c_j^i - \mu \delta_j^i) = 0, \quad (17)$$

которое представляет собой характеристическое уравнение аффинора c_j^i . Образующая l_x несет столько различных фокусов, сколько различных собственных значений имеет аффинор c_j^i .

Пусть μ_1 — собственное значение аффинора c_j^i . Подставляя его в (16), мы получим систему уравнений для определения фокального

направления, соответствующего фокусу $f_1 = x - \frac{1}{\mu_1} \xi$. Размерность это-

го фокального направления будет равна $m - \rho_1$, где

$$\rho_1 = \text{rang } (c_j^i - \mu_1 \delta_j^i).$$

Фокальные направления определяют распределение Δ_1 размерности $m - \rho_1$ на касательном расслоении T_x многообразия V_m .

Теорема 3. Если основной аффинор c_j^i параллельного нормального поля многообразия V_m имеет простую структуру, то есть приводится к диагональному виду, и имеет s различных собственных значений $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ кратности, соответственно равной $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($m_1 + \dots + m_s = m$), то многообразие V_m несет s — сопряженную систему распределений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s$ размерностей $m_1, m_2, \dots, m_s$.

Приведем матрицу $C = (c_j^i)$ к диагональному виду и запишем ее в форме

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_s \end{pmatrix}.$$

где $C_p = \mu_p^* \mu_p$ — скалярная матрица порядка m_p (μ_p — единичная матрица порядка m_p) и $\mu_p \neq \mu_q$ при $p \neq q$. Запишем матрицы B^* в блочной форме: $B^* = (B_{pq}^*)$, где B_{pq}^* — прямоугольная матрица порядка $m_p \times m_q$. Тогда соотношения (14) примут вид:

$$B_{pq}^* (\mu_q - \mu_p) = 0.$$

Отсюда следует, что $B_{pq}^* = 0$ при $p \neq q$ и матрицы B^* приводятся к блочно-диагональному виду

$$B^* = \begin{pmatrix} B_{11}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{22}^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{ss}^* \end{pmatrix}.$$

где B_{pp}^* — произвольные квадратные матрицы порядка m_p . А это означает (*), что многообразие V_m несет сопряженную систему, описанную в условии теоремы.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 сопряженные распределения Δ_p ($p = 1, \dots, s$), определенные на касательном расслоении многообразия V_m , будут инволютивными.

В самом деле, если $m_p = 1$, то распределение Δ_p одномерно и, следовательно, инволютивно. Если $m_p > 1$, то, как следует из (*), фокус f_p поверхности V_{m+1}^m , соответствующий этому распределению, будет оставаться неподвижным при перемещении точки $x \in V_m$ вдоль любой линии, принадлежащей распределению Δ_p . При этом прямые xf_p опишут коническую поверхность размерности $m_p + 1$, которая пересечет многообразие V_m по m_p -мерной поверхности, огибающей распределение Δ_p .

Таким образом, сопряженная система, определяемая на многообразии V_m , допускающем нормальное поле параллельных векторов, при выполнении условий теоремы 3 будет слабо голономной (**).

Московский институт стали и сплавов

Ереванский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Մ. Ա. ԱՅԻՎԻՈՒ, Ա. Վ. ՉԱԲՍԱԶՅԱՆ,

Աֆինական տաքածուրյան հագեցված ենթաբազմաձևություններ, որոնք բույլատրում են զուգահեռ նորմալ վեկտորների դաշտ

(¹) աշխատանքում դիտարկվում է n — չափանի հաստատուն կորույթյան տաքածույթությունում բնկղմված V_m ենթաբազմաձևությունը, որը թույլատրում է զուգահեռ վեկտորների դաշտ: Այս աշխատանքում կառուցվում է մետրիկական արդյունքների աֆինական բնդհանրացումը, որը ստացված է (¹) աշխատանքում: Ստացված են հետևյալ արդյունքները.

1. Որևի չափանի նորմալների ընտանիքը, որը որոշվում է զուգահեռ է վեկտորների դաշտով, կազմում է սանդենցյալ վերածվող $m + 1$ — չափանի և m ռանգով V_{m+1}^m բազմաձևություն:

2. A_n աֆինական տարածության հաყեցված V_m ենթաբազմաձևությունը թույլատրում է դուգաճեռ նորմալ γ վեկտորների դաշտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի նրան դուգաճեռ V_m բազմաձևություն:
3. Եթե դուգաճեռ նորմալ դաշտի V_m բազմաձևության հիմնական C_j աֆինորեն ունի պարզ կառուցվածք, սխիմըն բերվում է անկյունագծային տեսքի և ունի s տարբեր սեփական արժեքներ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, որոնց բազմապատկիչությունը համապատասխանաբար հավասար է $m_1, m_2, \dots, m_s$ ($m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$), ապա V_m բազմաձևությունը կրում է s — համալուծ սխեմների $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ բաշխում $m_1, m_2, \dots, m_s$ — չափողականություններով:
4. Համալուծ Δ_p ($p = 1, \dots, s$) բաշխումը, որը որոշված է V_m բազմաձևության շոշափող շերտավորումով, կլինի ինվոլյուտիվ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян. «Известия высш. уч. завед». Математика, №5, 148 — 157, 1974. ² Chen Bang — *gen. Geometry of submanifolds* (Pure and Appl. Math., №22), New York, Marcel Dekker, 1973. ³ М. А. Акивис. «Известия высш. уч. завед», Математика, № 1, 9—19, 1957. ⁴ М. А. Акивис. ДАН СССР, т. 146, № 3, 515—518 (1962). ⁵ М. А. Акивис. «Известия высш. уч. завед» Математика», № 10, 3—11, 1970. ⁶ Л. П. Норден. Пространства аффинной связности. М.—Л., 1950. ⁷ Ю. Г. Лумисте. «Учен. зап. Тартуск. ун-та», вып. 192, 12—46, 1966. ⁸ В. В. Рышков. ДАН СССР, 135, № 1, 20—22 (1960).