

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян

Структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах функций
аналитических в круге и гладких вплоть до его границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 29/XI 1974)

Пусть U — открытый единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница. Обозначим через A — множество всех функций f непрерывных в $U \cup \Gamma$ и регулярных в U . Символом H^p обозначим пространство Харди в круге. Пусть далее

$$1^\circ. \quad H_{n+1}^p = \{f: f^{(n+1)} \in H^p, \|f\|_{H_{n+1}^p} = \max_{0 \leq k \leq n+1} \|f^{(k)}\|_{H^p}\}, \quad 1 < p < +\infty$$

$$2^\circ. \quad \lambda_{\frac{1}{2}}^{(n)} = \{f: f^{(n)} \in A, \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - f^{(n)}(e^{it})| = O(|t|^{\frac{1}{2}})\}$$

$$\|f\|_{\lambda_{\frac{1}{2}}^{(n)}} = \|f\| + \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - f^{(n)}(e^{it})| |t|^{-\frac{1}{2}}.$$

$$3^\circ. \quad \lambda_{\frac{1}{3}}^{(n)} = \{f: f^{(n)} \in A, \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - 2f^{(n)}(e^{it}) + f^{(n)}(e^{i(n-1)t})| = O(|t|^{\frac{1}{3}})\},$$
$$\|f\|_{\lambda_{\frac{1}{3}}^{(n)}} = \|f\| + \sup_{t \in \Gamma} |f^{(n)}(e^{i(n+1)t}) - 2f^{(n)}(e^{it}) + f^{(n)}(e^{i(n-1)t})| |t|^{-\frac{1}{3}}.$$

Легко видеть, что эти пространства являются банаховыми алгебрами относительно поточечного умножения. В дальнейшем X — будет обозначать одну из вышеуказанных алгебр. Для формулировки основных результатов статьи, введем еще следующие обозначения:

а) для каждого ненулевого элемента $f \in X$ будем обозначать через G_f, F_f соответственно внутреннюю и внешнюю части f , так, что $f = G_f F_f$, в свою очередь $G_f = B_f S_f$, B_f — произведение Бляшке, S_f — сингулярный множитель, (см. (1)). Множество нулей функции f в открытом круге U обозначим через Z_f , через μ_f обозначим неотрицательную меру, определяющую S_f , $\text{supp } \mu_f$ — замкнутое множество на Γ , на котором сосредоточена мера μ_f . Для любого $f \in X$ будем обозначать через $E_m(f)$ множество нулей f на Γ кратности выше m .

Определение. Пусть $G = BS$ — некоторая внутренняя функция, Z — множество нулей произведения Бляшке, μ — сингулярная

мера, определяющая S , пусть $E_0, E_1, \dots, E_n$ замкнутые множества, удовлетворяющие условиям: $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset |\operatorname{supp} p| \cup (Z \cap \Gamma)|$, E_0/E_n — изолированное множество. Будем обозначать через $I(G, E_0, E_1, \dots, E_n)$ — множество элементов f из X обладающих свойствами: G делит G_f , $E_m(f) \supset E_m$, $m=0, 1, \dots, n$.

Легко видеть, что I — замкнутый идеал в X . Из основного результата статьи следует, что идеалами $I(G, E_0, \dots, E_n)$ — исчерпываются все замкнутые идеалы в X , в именно справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $I \neq \{0\}$ — замкнутый идеал в X , G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I .

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f), \quad m=0, 1, 2, \dots, n$$

тогда

$$I = I(G_I, E_0(I), \dots, E_n(I)).$$

Отметим, что теорема 1, когда $X = H_{n+1}^2$ была анонсирована Б. Н. Коренблумом ⁽²⁾.

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Исходя из результатов работы ⁽²⁾ для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующую аппроксимационную теорему.

Теорема 2. Пусть $f \in X$ и $E_n(f)$ определено как выше, тогда существует последовательность $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^\infty$, $\tilde{r}_k \in X$, $k=1, 2, \dots$ со следующими свойствами:

$$a) \quad |\tilde{r}_k^{(m)}(z)| \leq C[d(z, E_n(f))]^{2(n+1-m)}, \quad z \in \bar{U}, \quad m=0, 1, \dots, n$$

$$b) \quad \|G_k - f\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $d(z, E_n(f))$ — расстояние от точки z до множества $E_n(f)$.

Пусть E — замкнутое множество меры нуль на Γ , и пусть $\{(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})\}_{k=1}^\infty$ последовательность дополнительных интервалов множества E на Γ . Предположим, что E — множество Берлинга — Карлсона, т. е.

$$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) \lg \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} < +\infty.$$

Лемма 1. (см. ⁽³⁾) Пусть δ — положительное число и

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \lg \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - \alpha_k} \right), & \alpha_k < t < \beta_k \\ +\infty & \text{в остальных точках интервала } (-\pi, \pi) \end{cases}$$

Тогда

$$a) \quad h_\delta \in L^1(-\pi, \pi), \quad \text{функция } G_\delta(z) = \exp \left(-\frac{n+1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi h_\delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right)$$

принадлежит пространству $A^{(n+1)}$.

^(*) $A^{(n+1)}$ алгебра функций $f, f^{(n+1)} \in A$

$$b) |G_n(z)| \leq 1, \quad |G_n^{(m)}(z)| \leq C_n(\delta) |d(z, E)|^{2(n+1-m)}$$

$m = 0, 1, \dots, n+1$ для любого $\delta > 0$, где $C_n(\delta)$ — положительное число, зависящее только от n и δ , кроме того $G_n(z) \rightarrow 1$, при $\delta \rightarrow 0$ равномерно вне множества E .

В дальнейшем при фиксированном $f \in X$ будем полагать $E = E_n(f)$.

Пусть γ — дуга на Γ концы которой принадлежат $E_n(f)$. Пусть далее

$$a(z) = \int_{\gamma} \frac{|\log|f(t)|| |dt|}{|t-z|^2}, \quad z \in U \cup \gamma, \quad d(z) = d(z, E)$$

Лемма 2. Пусть $f \in X$, $\|f\|_\infty \leq 1$, пусть далее $z = re^{i\tau}$, $e^{i\tau} \in \gamma$, $d(z) \leq 1$ и $(1-r)\eta < d(z)$, где $\eta > 1$ фиксированное число, тогда при $d(z) \rightarrow 0$ справедливы следующие оценки.

$$|f^{(m)}(z)| = \begin{cases} O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m} \psi(e^{i\tau}), & \text{при } X = H_{n+1}^p(\psi) = \sup_{0 < \rho < 1} |f^{(n+1)}(\rho z)|, z \in \Gamma, \\ O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m+1} & \text{при } X = \lambda_\psi^{(n)}, \\ O\left(\frac{|\log d(z)|}{a(z)}\right)^{n-m+1} |\log d(z)|, & \text{при } X = \lambda_\psi^{(n)} \end{cases}$$

Когда $X = \lambda_0^{(n)} = A^{(n)}$ лемма 2 доказана в работе (4). Пусть $\delta > 0$, положим $\Phi_\delta = |G_n|^{2(n+1)}$, и пусть

$$f_\delta = \Phi_\delta \cdot f.$$

Сначала доказывается, что $\|f_\delta - f\|_X \rightarrow 0$, когда $\delta \rightarrow 0$ затем для фиксированного $\delta > 0$ доказывается, что

$$\|G_\rho f_\delta - f_\delta\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0.$$

Отметим, что аналог теоремы 1 справедлив и для алгебры

$$\lambda_\omega^{(n)} = \{f : f^{(n)} \in A, \omega(f^{(n)}, \delta) = O(\omega(\delta))\} \quad n \geq 1,$$

где $\omega(f^{(n)}, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f^{(n)}$.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

Փակ իղեալների ստրուկտուրան շրջանում անալիտիկ և փակ շրջանում
ողորկ ֆունկցիաների մի բանի սղակներում

Իրոք H_{n+1}^p , $\lambda_\psi^{(n)}$, $\lambda_\omega^{(n)}$ — ալն ֆունկցիաների սղակներն են. որոնք անալիտիկ
են միավոր շրջանի ներսում և, որոնց n -րդ կարգի ածանցյալը պատկանում
է համապատասխանաբար H^p դասին. Սրա-ին և Զիգմունդի դասին

փակ շրջանում: Հոդվածում ստացված է նշված սղակներում փակ իդեալների
 լրիվ նկարագրությունը:

Թեորեմ. Դիցուք X -ը համընկնում է այդ սղակներից մեկն ու
 մեկի հետ, և I -ն փակ իդեալ է X -ում, և դիցուք

$$E_k(I) = \bigcap_{f \in I} E_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

որտեղ $E_k(f)$ -ը f -ֆունկցիայի k -ից բարձր կարգի զերոների բազմությունն
 է շրջանագծի վրա, իսկ G_I -ն I -ին պատկանող ֆունկցիաների ներքին մա-
 սերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է: Այդ դեպքում I -ն համընկնում
 է X -ին պատկանող այն բոլոր f ֆունկցիաների բազմության հետ, որոնց
 G_f ներքին մասը բաժանվում է G_I -ի վրա և

$$E_k(f) \supset E_k(I), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, 1963. ² Б. И. Коренблум, ДАН СССР, т. 202, № 6 (1972). ³ Ф. А. Шимоян, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, № 6 (1972). ⁴ Б. И. Коренблум, Функции анал. и прилож. 6:3, 1972.