ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 3

УДК 51 621 391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

Сравнительные характеристики согласующих индукторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 25/X 1974)

1. В заметке представлены результаты сравнения двух видов индукторов—алгоритмов индуктивного обобщения, а именно, индукторов, которые формируют гипотезы не противоречащие исходной информации, с индукторами, не обладающими указанным свойством. В частности, доказано, что при определенных условиях индуктивного обобщения индукторы второго вида предпочтительней первого, относительно выбранного в работе критерия оценки индукторов.

Работа относится к направлению исследований, описанных в [1-3] и является продолжением [4].

2. Пусть M-произвольное конечное множество из k элементов. Объектами нашего рассмотрения будут произвольные упорядоченные пары непересекающихся подмножеств в M, в том числе пары вида $(\varnothing, M')$ $(M', \varnothing)$, которые мы будем обозначать через ПМ (пара множеств).

В дальнейшем изложении предполагается, что параметр k произвольный, но фиксированный, и доказываемые утверждения справедливы для $k>5$. Для удобства дальнейшего изложения, так же как и в [4] перенумеруем все ПМ номерами $1, 2, \ldots, \Theta$, где Θ—число всевозможных ПМ в M. Эта нумерация в дальнейшем предполагается фиксированной.

Через $\varkappa$ обозначим соответствующий нумерующий оператор, через ν_1, ν_0—декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру первую и вторую компоненты ПМ с этим номером.

В дальнейшем изложении каждая ПМ и ее номер отождествляются.

Введем следующие обозначения и соглашения:

$N=\{0, 1, 2, \ldots\}$, $T=\{0, 1, 2, \ldots, \Theta\}$, ОРФ—общерекурсивная функция, $|A|$—мощность множества A.

Для произвольных $x, y\in T$, через $|x|$ обозначим мощность множества $\nu_1(x)\cup\nu_0(x)$, через $x * y$, где $*$—одна из операций

$\cup$, $\cap$, ∇ (симметрическая разность), обозначим ПМ с номером $(\varkappa(\nu_1(x) * \nu_1(y), \nu_0(x) * \nu_0(y))$.

Если $|y| > |x|$, то y назовем *расширением* x и будем писать $y \succ x$; если $\nu_1(x) \subseteq \nu_1(y)$ и $\nu_0(x) \subseteq \nu_0(y)$, то y назовем *согласованным расширением* x и будем писать $x \sqsubseteq y$.

Пусть также для произвольного A, $A \subseteq T$ и $A \neq \varnothing$, $R(A) = \{x | x \in T \,\&\, \exists z (z \in A \,\&\, x \sqsubseteq z)\}$, $D^l = \{x | x \in T \,\&\, |x| = l\}$, при $0 \leqslant l \leqslant k$, $S_{\geqslant r} = \bigcup\limits_{l=r}^{k} D^l$, $S_{\leqslant r} = \bigcup\limits_{l=0}^{r} D^l$, при $0 \leqslant r \leqslant k$.

Элементы множества D^k будем называть *абсолютными* ПМ, а $R(A)$ — *разложением* A.

3. Введем понятие *индуктора* — алгоритма индуктивного обобщения.

Определение 1. Произвольную одноместную ОРФ f назовем *индуктором*, если

1. $\forall x (x \in T \to f(x) \in T)$,
2. $\forall x (x \in T \to f(x) \succcurlyeq x)$,
3. $\forall x (x \in T \,\&\, |f(x)| = |x| \to f(x) = x)$,
4. $\forall x (x \in N \setminus T \to f(x) = \Theta + 1)$.

Определение 2. Индуктор f назовем *согласующим*, если выполнено условие:

$$2^{(1)}.\ \forall x (x \in T \to x \sqsubseteq f(x)).$$

Множество всех индукторов обозначим через F, согласующих индукторов через F_c и несогласующих индукторов (т. е. элементов множества $F \setminus F_c$) через $F_{нс}$.

Введем критерии оценки возможностей заданных индукторов при расшифровке заданных ПМ, аналогичные рассмотренным в [1].

Определение 3. Для произвольных ПМ v и индуктора f *объемной сложностью* v *относительно* f назовем число

$$S_{об}(v, f) = \begin{cases} \min\limits_{x \in T,\ v = f(x)} |x|, & \text{если такое } x \text{ существует,} \\ c + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где c — заранее фиксированное натуральное число.

Так как всякая ПМ x может быть задана посредством указания принадлежности к $\nu_1(x)$ или $\nu_0(x)$ каждого из k элементов множества M, то с точки зрения приложений интересно рассмотрение индукторов, относительно которых объемная сложность заданных ПМ не превышает k. Поэтому в дальнейшем мы полагаем $c = k$.

Определение 4. Для произвольных $A \subseteq T$, $G \subseteq F$ ($A \neq \varnothing$, $G \neq \varnothing$) *объемной сложностью* A *относительно* G назовем число

$$S_{об}(A, G) = \min_{f \in G} \max_{v \in A} S_{об}(v, f).$$

4. Укажем некоторые общие свойства согласующих и несогласующих индукторов.

Свойство 1. $\forall y(y \in T \setminus D^k \to \exists fg(f \in F_c \,\&\, g \in F_{\text{нс}} \,\&\, S_{\text{об}}(y, f) = S_{\text{об}}(y, g) = k+1))$. Пусть $f \in F_c$, $y \in T \setminus D^k$ и $A = \{x \mid f(x) = y\}$. Ясно, что $\forall x(x \in A \to x \subseteq y)$. Т. к. $y \in D^k$, то при $k > 1$ найдется хотя бы одно y^* такое, что $y^* \neq y$ и $y \subseteq y^*$.

Определив индуктор f^* так, что

1. $\forall x(x \in A \to f^*(x) = f(x))$

2. $\forall x(x \notin A \to f^*(x) = y^*)$,

получим, что $S_{\text{об}}(y, f^*) = k + 1$.
Для несогласующих индукторов утверждение доказывается аналогично.

Очевидно следующее

Свойство 2. а. $\forall y \exists f \forall x(y \in T \,\&\, x \in R(y) \to f \in F_c \,\&\, f(x) = y)$.

б. $\forall y \exists g \forall x(y \in T \,\&\, x \in S_{<|y|} \to g \in F_{\text{нс}} \,\&\, g(x) = y)$.

Следствие 1. $\forall x \exists fg(x \in T \to f \in F_c \,\&\, g \in F_{\text{нс}} \,\&\, S_{\text{об}}(x, f) = S_{\text{об}}(x, g) = 0)$.

Следствие 2. $\neg\exists f^* g^* \forall fgx(f \in F_c \,\&\, g \in F_{\text{нс}} \,\&\, x \in T \to (f^* \in F_c \,\&\, S_{\text{об}}(x, f^*) \leq S_{\text{об}}(x, f)) \vee (S_{\text{об}}(x, g^*) \leq S_{\text{об}}(x, g) \,\&\, g^* \in F_{\text{нс}}))$.
Таким образом, в каждом из классов F_c и $F_{\text{нс}}$ не существует оптимальных индукторов.

Свойство 3. $\forall A(R(v) \subseteq A \subseteq T \to S_{\text{об}}(A, F_c) \geq v)$.
Действительно, для произвольного $f \in F_c$ либо

$$\forall y(y \in R(v) \to \exists x(x \in R(v) \,\&\, f(x) = y))$$

и тогда $\forall x(x \in R(v) \to f(x) = x)$,
либо $\exists y(y \in R(v) \,\&\, \forall x(x \in T \to f(x) \neq y))$.

В обоих случаях имеет место доказываемое утверждение.

Справедливо также следующее

Свойство 4. $\forall rA\left(1 \leq r \leq k \,\&\, A \subseteq T \to \left(|A| > \sum_{i=0}^{r-1} 2^i C_k^i \leftrightarrow S_{\text{об}}(A, F) \geq r\right)\right)$.

5. В условии 2 определения индуктора выделена основная особенность акта индуктивного обобщения—построение гипотезы, которая увеличивает число классифицированных объектов. При этом условие согласованности 2' дополнительно требует, чтобы «гипотеза» не противоречила классификации, заданной на исходном множестве объектов. Казалось, что согласующие индукторы должны производить расшифровку с меньшей объемной сложностью, чем несогласующие.

В нижеследующих теоремах доказывается ошибочность такого предположения. В теореме 1 приведен некоторый достаточно естественный класс согласующих индукторов, которые расшифровывают произвольную ПМ не лучше несогласующих индукторов. В то же время возможны классы ПМ, оптимальную расшифровку которых можно произвести либо согласующими, либо несогласующими индукторами (теорема 2).

Теорема 1. *Если* $G = \{f | f \in F_c \ \& \ \exists z_1 z_2 (z_1, z_2 \in T \ \& \ v_1(z_1) = v_0(z_2) \ \& \ v_0(z_1) = v_1(z_2) \ \& \ f(z_1) \neq z_1 \ \& \ f(z_2) \neq z_2)\}$, *то*

$$\forall A (A \subseteq T \rightarrow S_{об}(A, F_{нс}) \leq S_{об}(A, G)).$$

Теорема 2. $\exists A_1 A_2 (A_1, A_2 \subseteq T \ \& \ S_{об}(A_1, F_{нс}) < S_{об}(A_1, F_c) \ \& \ S_{об}(A_2, F_{нс}) > S_{об}(A_2, F_c))$

Пусть расшифровка некоторой ПМ v производится по ПМ x такой, что $x = x_1 \cup x_2$ и в x_1 включены „типичные" для v элементы, а в x_2 — „нетипичные" или „паталогические".

Пусть при этом множество объектов, включенных в x, не позволяет полностью расшифровать v посредством заданных индукторов. В таком случае равноправное рассмотрение всех элементов из x, что характеризует расшифровку посредством согласующих индукторов, может привести к классификации с большим числом ошибок, чем в классификации, основанной на x_1 и не запрещающей ошибки на x_2. Такая расшифровка возможна при применении несогласующих индукторов.

В следующей теореме вышеприведенному утверждению придан точный смысл.

Теорема 3. *Для произвольной* ПМ $v \in S_3$ *можно указать согласующий* f_1 *и несогласующие* f_2 *индукторы такие, что для произвольной* ПМ $x \in S_{|v|-3}$ $(\emptyset, \emptyset)$ *выполняются следующие соотношения:*

$$f_i(x) \not\subseteq v \quad \text{и} \quad v \not\subseteq f_i(x), \quad \text{при} \quad i = 1, 2,$$

$$x \subseteq f_1(x) \quad \text{и} \quad x \not\subseteq f_2(x),$$

но

$$|f_2(x) \cap v| > |f_1(x) \cap v|.$$

Автор выражает благодарность И. Д. Засланскому за редактирование статьи.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Համաձայնեցնող ինդուկտորների համեմատական բնութագրեր

Աշխատանքում ներկայացված են երկու տիպի ինդուկտորների (կամ ինդուկտիվ ընդհանրացման ալգորիթմների) համեմատության արդյունքները։

Համեմատվում են սկզբնական ինֆորմացիային չհակասող ինդուկտորները այդ հատկությունը չունեցող ինդուկտորների հետ։ Ապացուցվում է, որ երկրորդ տիպի ինդուկներն որոշակի պայմաններում ավելի գերադասելի են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров*. Сб. Проблемы передачи информации, т. I, вып. 1, 1965. [2] *Я. М. Барздинь*. ДАН СССР, т. 206, № 3, 1972. [3] *Ю. И. Журавлев, В. В. Никифоров*. «Кибернетика», № 3, 1971. [4] *Э. М. Погосян*. ДАН Арм. ССР, т. LVIII, № 1, (1974). [5] *Э. Хант, Дж. Марин, Ф. Стоун*. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине, «Мир», М., 1970.