ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 2

УДК 51995

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. Бозоян

К построению надежных схем из ненадежных элементов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 26/IX 1974)

Идею построения надежных схем из ненадежных элементов с помощью их дублирования и надежного голосования выходов, предложенной Джоном фон Нейманом ([1]), не учитывает функциональные и структурные особенности схем, т. е. там не решается задача получения требуемой надежности схемы введением минимальной избыточности аппаратур.

Целью настоящей заметки является построение алгоритма нахождения минимального числа «самых важных» элементов в схеме (реализующей функцию алгебры логики), дублирование и надежное голосование выходов которых обеспечивает требуемую надежность схемы.

Пусть схема S_f, имеющая n входов и один выход, реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и состоит из функциональных элементов, которые некоторым образом пронумерованы. Обозначим их через

$$X_1, X_2, \ldots, X_N.$$

Пусть с вероятностью $p_{i,\sigma}$ $\left(i=\overline{1,N};\ \sigma=0,1;\ 0\leqslant p_i=p_{i,0}+p_{i,1}<\frac{1}{2}\right)$ элемент X_i превращается в схему, реализующую константную функцию σ. Пусть вероятность появления набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из нулей и единиц на входах схемы S_f равна $q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\left(\sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1\right)$.

Определим вероятность появления ложного значения на выходе схемы S_f, при условии, что на входах всегда поступают «правильные» наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Обозначим эту вероятность через $P_{S_f}(q, p_{1,\sigma}, \ldots, p_{N,\sigma})$. При этом будем говорить, что схема S_f работает с надежностью $1-P_{S_f}(q, p_{1,\sigma}, \ldots, p_{N,\sigma})$.

Заметим, что значение выхода каждого функционального элемента X_i $(i=\overline{1,N})$ схемы S_f, вообще говоря, зависит от набора значений входных сигналов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (его обозначим через $X_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$), поэтому значение выходного сигнала схемы S_f зависит от значений

$$X_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad (i=\overline{1,N}).$$

Значение выходного сигнала схемы S_f обозначим

$$S_f(X_1,\ldots,X_N)=S_f(X_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,X_N(a_1,\ldots,a_n)).$$

Если элемент $X_i(i=\overline{1,N})$ превратился в схему, реализующую константную функцию σ ($\sigma=0,1$), то мы говорим, что элемент X_i превратился в X_i^σ, где $X_i^\sigma(a_1,\ldots,a_n)=\sigma$. Обозначим

$$\Omega^{S_f}_{i_1(\sigma i_1)\ldots i_k(\sigma i_k)}=\sum_{(a_1,\ldots,a_n)} q(a_1,\ldots,a_n)|S_f(X_1,\ldots,X_{i_1},\ldots,X_{i_k},\ldots,X_N)\oplus$$

$$\oplus S_f(X_1,\ldots,X_{i_1}^{\sigma i_1},\ldots,X_{i_k}^{\sigma i_k},\ldots,X_N), \qquad (1)$$

где сумма берется по всем наборам значений входных сигналов $(a_1,\ldots,a_n)$. Очевидно, $\Omega^{S_f(\sigma i_1)\ldots i_k(\sigma i_k)}_{i_1}$ есть вероятность того, что если элементы $X_{i_1},\ldots,X_{i_k}$ схемы S_f превращены соответственно в $X_{i_1}^{\sigma i_1},\ldots,X_{i_k}^{\sigma i_k}$, а все остальные элементы функционируют правильно, то на ее выходе получается ложный сигнал. Обозначим $M=\{1,2,\ldots,N\}$. Тогда очевидно

$$P_{S_f}(q,p_{1,\sigma},\ldots,p_{N,\sigma})=\sum_{\{(i_1,\ldots,i_k)\}}\sum_{(\sigma i_1,\ldots,\sigma i_k)}[\Omega^{S_f}_{i_1(\sigma i_1)\ldots i_k(\sigma i_k)}\times$$

$$\times\prod_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}}p_{i,\sigma_i}\cdot\prod_{l\in M\setminus\{i_1,\ldots,i_k\}}(1-P_l), \qquad (2)$$

где внутренняя сумма берется по всем 2^k наборам значений $(\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})$ $(\sigma_{i_j}=0,1;\ j=\overline{1,k})$, а внешняя сумма—по всем 2^N-1 наборам индексов $(i_1,\ldots,i_k)$ $(k=\overline{1,N})$. Обозначим

$$\Omega^{S_f}_i=\Omega^{S_f}_{i(0)}\cdot p_{i,0}+\Omega^{S_f}_{i(1)}\cdot p_{i,1}. \qquad (3)$$

$\Omega^{S_f}_i$ называется активностью элемента X_i в схеме S_f относительно функции распределения $q(a_1,\ldots,a_n)$ вероятностей появления наборов $(a_1,\ldots,a_n)$ входных сигналов схемы S_f.

Выделив линейную часть, формулу (2) перепишем в следующем виде:

$$P_{S_f}(q,p_{1,\sigma},\ldots,p_{N,\sigma})=\sum_{i=1}^{N}\Omega^{S_f}_i+\gamma(q,p_{1,\sigma},\ldots,p_{N,\sigma}).$$

Теорема. *При* $p_{i,\sigma}<\dfrac{1}{2N}$ $(i=\overline{1,N};\ \sigma=0,1)$

$$\gamma(q,p_{1,\sigma},\ldots,p_{N,\sigma})\leqslant 4N^2p^2.$$

где $p=\max\limits_{i,\sigma}p_{i,\sigma}$.

Доказательство. Поскольку для всех наборов $(i_1,\ldots,i_k)$ и $(\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})$

$$0\leqslant\Omega^{S_f}_{i_1(\sigma i_1)\ldots i_k(\sigma i_k)}\leqslant 1,\ \text{то}$$

$$\gamma(q,p_{1,\sigma},\ldots,p_{N,\sigma})=\sum_{i=1}^{N}\left|\Omega^{S_f}_i\left|\prod_{r\in M\setminus\{i\}}(1-p_r)-1\right|\right|+$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\ \sum_{(\sigma i,\sigma j)}\Omega^{S_f}_{i(\sigma i)j(\sigma j)}\cdot p_{i,\sigma_i}p_{j,\sigma_j}\prod_{r\in M\setminus\{i,j\}}(1-p_r)+\ldots+$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_k\leqslant N}\ \sum_{(\sigma i_1,\ldots,\sigma i_k)}\Omega^{S_f}_{i_1(\sigma i_1)\ldots i_k(\sigma i_k)}\cdot\prod_{r\in\{i_1,\ldots,i_k\}}p_{i,\sigma_i}\times$$

$$\times \prod_{r \in M \setminus |i_1,\ldots,i_k|} (1-p_r) + \ldots + \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} \Omega^{S_f}_{1^{(\sigma_1)},\ldots,N^{(\sigma_N)}} \cdot \prod_{l \in M} p_{l,\sigma_l} \leqslant$$

$$\leqslant p^2 \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \sum_{(\sigma_i,\sigma_j)} \Omega^{S_f}_{i^{(\sigma_i)}\, j^{(\sigma_j)}} + \ldots +$$

$$+ p^k \sum_{1 \leqslant i_1,\ldots,i_k \leqslant N} \sum_{(\sigma_{i_1},\ldots,\sigma_{i_k})} \Omega^{S_f}_{i_1^{(\sigma_{i_1})},\ldots,i_k^{(\sigma_{i_k})}} + \ldots + p^N \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)} \Omega^{S_f}_{1^{(\sigma_1)},\ldots,N^{(\sigma_N)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^2 p^2 C_N^2 + \ldots + 2^k p^k C_N^k + \ldots + 2^N p^N = (1+2p)^N -$$

$$-1-2Np = (1+2p)^{\frac{1}{2p}\cdot 2Np} - 1 - 2Np \leqslant e^{2Np} - 1 - 2Np =$$

$$= 1 + 2Np + \frac{N^2(2p)^2}{2!} + \frac{N^3(2p)^3}{3!} e^{\theta 2Np} - 1 - 2Np =$$

$$= 4p^2 \left(\frac{N^2}{2} + \frac{N^3 p}{3} e^{2\theta Np} \right),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Из условия $p_{i,\sigma} < \frac{1}{2N}$ $(i = \overline{1,\ N};\ \sigma = 0,\ 1)$ следует

$$\frac{N^3 p}{3} e^{2\theta Np} < \frac{N^3 p}{3} e < \frac{N^2}{2}.$$

Следовательно, $\Box(q,\ p_{1,\sigma},\ \ldots,\ p_{N,\sigma}) \leqslant 4N^2 p^2$.

Итак,

$$P_{S_f}(q,\ p_{1,\sigma},\ \ldots,\ p_{N,\sigma}) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \Omega^{S_f}_i + 4N^2 p^2. \qquad (4)$$

Опишем алгоритм оптимального дублирования элементов схемы S_f. Предворительно заметим, что при тройном дублировании некоторого элемента X_i схемы S_f и надежного голосования выходов этих трех экземпляров, вероятность того, что результат голосования будет одной из константных функций 1 или 0, не превосходит числу $6p^2$. Действительно, для того, чтобы значение выхода голосователя было константой 1, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы два экземпляра элементов X_i превратились в X_i^1. Вероятность этого события равна $p'_{i,1} = 3p_{i,1}^2(1-p_i) + p_{i,1}^3$. Анялогично получим вероятность того, что выход голосователя реализует константу 0:

$$p'_{i,0} = 3p_{i,0}^2(1-p_i) + p_{i,0}^3.$$

Можно убедиться, что

$$p'_{i,1} + p'_{i,0} \leqslant 6p^2. \qquad (5)$$

Таким образом, тройное дублирование и надежное голосование выходов трех экземпляров элемента X_i с точки зрения надежности схемы S_f означает, что числа $p_{i,1}$ и $p_{i,0}$ заменяются соответственно числами $p'_{i,1}$ и $p'_{i,0}$. Наша задача заключается в том, чтобы для заданного

$\varepsilon_0 \left(0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\right)$ найти минимального числа элементов $X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}$ в схеме S_f, чтобы при тройном дублировании этих элементов выполнялось неравенство

$$P_{S_f}(q, p_{1,\sigma}, \ldots, p_{j_1,\sigma}, \ldots, p_{j_m,\sigma}, \ldots, p_{N,\sigma}) \leqslant \varepsilon_0.$$

Эту задачу мы решим для случая

$$N p^* < \frac{\varepsilon_0}{8}, \tag{6}$$

Исходя из формулы (4) алгоритм решения поставленной задачи описывается следующим образом:

1. Определить значение

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} Q_{i_f}^{S} \tag{7}$$

Если $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, то работу алгоритма считать законченной, в противном случае перейти к п. 2.

2. Среди слогаемых $Q_i^{S_f}$ $(i = \overline{1, N})$ найти максимальные. Пусть одно из них (например, с меньшим индексом) является $Q_l^{S_f}$. Дублировать элемент X_l в три раза, присвоить буквам $p_{l,1}$ и $p_{l,0}$ значения $p_{l,1}$ и $p_{l,0}$ и перейти к п. 1. Из условия (6) следует, что при $N \geqslant 2$ более, чем тройное дублирование элементов X_l схемы S_f не приходится. Действительно, если максимальным среди $Q_i^{S_f}$ является $Q_l^{S_f} = Q_{f(0)}^{S_f} p_{l,0}^{i} + Q_{f(1)}^{S_f} p_{l,1}^{i}$, то имея в виду (5) и (6)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{S_f} < N Q_l^{S} < N(p_{l,0}^{i} + p_{l,1}^{i}) \leqslant 6 N p^* \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2},$$

т. е. уже дублированный элемент X_l вторичному дублированию не подлежит.

Пример. Пусть схема S_f реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_{34}) = x_1 \oplus x_2 (x_3 \vee x_4 \vee \ldots \vee x_{34})$ (рис. 1). Пусть базисными элементами являются: „$\wedge$" („и"), „$\vee$" („или") и „$\neg$" („нет"). Элементы схемы пронумерованы, как показан на рис. 1: элемент с номером i означает X_i $(i = 1, 2, \ldots, 41)$, $p_{i,\sigma} = 10^{-8}$ для всех $i, \sigma (i = 1, 2, \ldots, 41;\ \sigma = 0, 1)$ и $q(x_1, \ldots, x_{34}) = \frac{1}{2^{34}} (x_j = 0, 1;\ j = 1, 2, \ldots, 34)$. Пусть требуется, чтобы после дублирования необходимого минимального числа элементов и надежного голосования значений выходов этих элементов схема S_f работала с надежностью, не меньшую $1 - \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 10^{-12}$. Исходя из формул (1) и (3) для данной схемы получим:

$$Q_1^{S_f} = Q_2^{S_f} = \ldots = Q_{10}^{S_f} = \frac{10^{-8}}{2^{30}};$$

$$Q_{11}^{S_f} = Q_{18}^{S_f} = \ldots = Q_{24}^{S_f} = \frac{10^{-8}}{2^{28}};$$

$$Q_{25}^{S}f = Q_{26}^{S}f = Q_{27}^{S}f = Q_{28}^{S}f = \frac{10^{-8}}{2^{24}};$$

$$Q_{29}^{S}f = Q_{30}^{S}f = \frac{10^{-8}}{2}; \qquad Q_{31}^{S}f = 10^{-8};$$

$$Q_{32}^{S}f = Q_{33}^{S}f = \frac{10^{-8}}{2}; \qquad Q_{34}^{S}f = Q_{35}^{S}f = \frac{3}{4} \cdot 10^{-8};$$

$$Q_{36}^{S}f = 10^{-8}; \quad Q_{37}^{S}f = \left(1 - \frac{1}{2^{32}}\right) \cdot 10^{-8};$$

$$Q_{38}^{S}f = Q_{39}^{S}f = \left(1 - \frac{1}{2^{33}}\right) \cdot 10^{-8}; \quad Q_{40}^{S}f = \frac{10^{-8}}{2}; \quad Q_{41}^{S}f = 10^{-8}$$

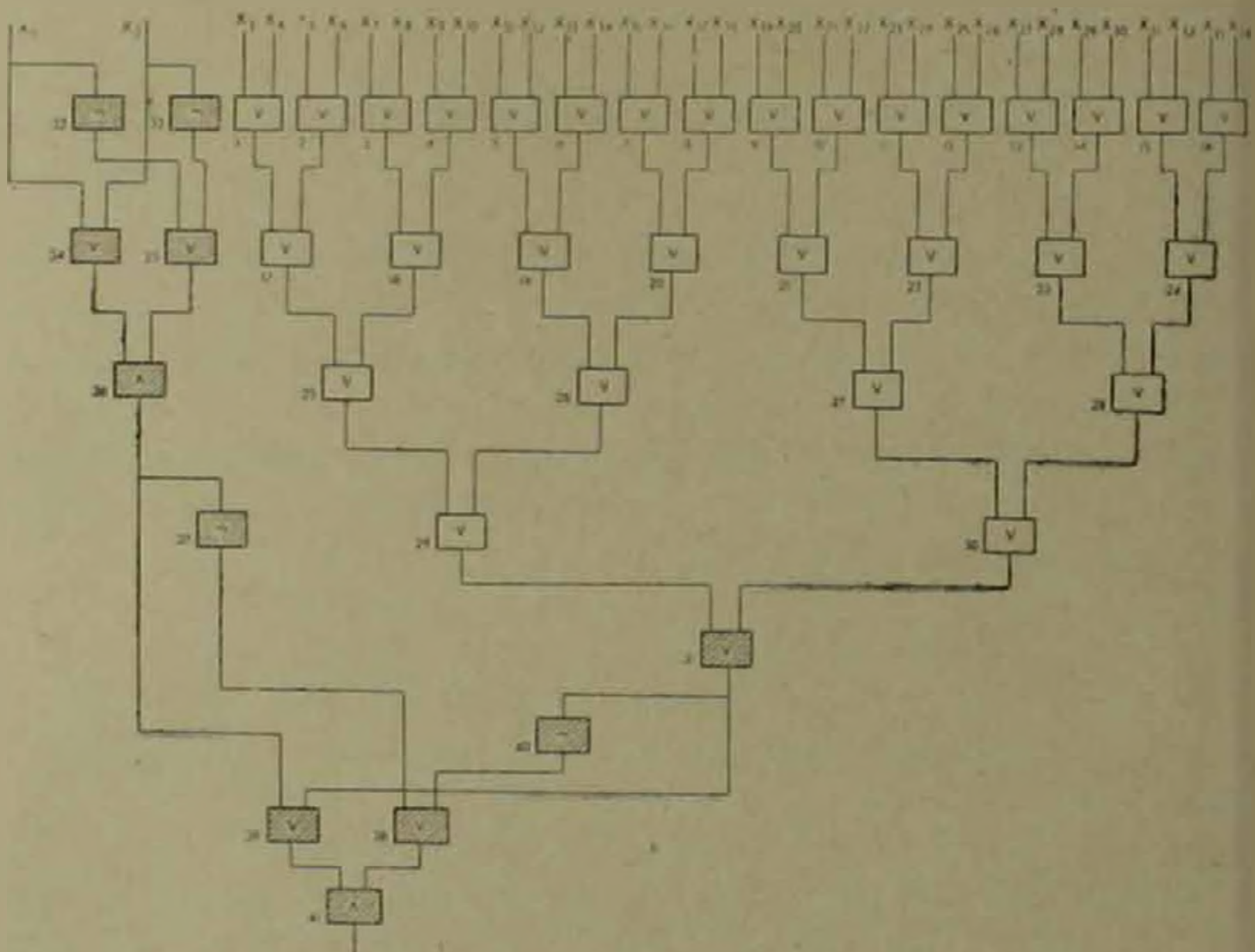

Рис. 1

Очевидно, выполнено условие (6), поэтому описанный выше алгоритм применим для данной схемы. После применения этого алгоритма получим, что для обеспечения требуемой надежности схемы необходимо дублировать элементы $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{41}$ (на рис. 1 они заштрихованы).

Замечание. Изложенный выше алгоритм оптимального дублирования можно применить также относительно схемы S_F, имеющую n входов и m выходов, реализующую систему функций алгебры логики

$$F=(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)).$$

При этом в качестве значения ε (см. формулу (7)) необходимо взять $\varepsilon=max|\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m|$, где $\varepsilon_j=\sum_{i=1}^{N}\Omega_i^{x_i f_j}$ (здесь $\Omega_i^{x_i f_j}$ есть активность элемента X_i схемы S_f относительно ее j—го выхода, соответствующего функцию f_j).

Автор считает приятным долгом поблагодарить А. В. Петросяна за ценные советы.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Շ. Ն. ԲՈՅՈՅԱՆ

Անհուսալի էլեմենտներից հուսալի սխեմաներ կառուցելու մասին

Դիտարկվում է n մուտք և մեկ ելք ունեցող տրամաբանական հանրահաշվի ֆունկցիա իրականացնող սխեմա, որը հավաքված է ֆիքսված բազիսային էլեմենտների վրա։ Սխեմայում օգտագործված յուրաքանչյուր էլեմենտի համար տրված են երեք՝ համապատասխանաբար 1 և 0 հաստատուն ֆունկցիաներ իրականացնող սարքերի վնասվելու հավանականություններ։ Ենթադրված այդ հավանականություններից և սխեմայի մուտքին տրված ազդանշանների համախմբություններից հանգնա գալու հավանականությունների բաշխումից որոշվում է սխեմայի ելքի սխալի հավանականություն։ Որոշ բնական նախադրությունների դեպքում լուծվում է մինիմալ քվով էլեմենտներ կրկնօրինակելով (հոսպատակելով) և նրանց ելքերը հուսալիորեն «քվեարկելով» ելքային սխեմայից նույն ֆունկցիան իրականացնող, բայց պահանջված հուսալիությամբ աշխատող սխեմա ստանալու խնդիրը։ Խնդրի լուծման ալգորիթմը ցուցադրվում է մասնավոր օրինակի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. Нейман.* Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент, Сб. Автоматы. ИЛ., М., 1956.