ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 2

УДК 517. 512

МАТЕМАТИКА

В. С. Виденский

О V-разрешимых семействах многочленов по системе Чебышева

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/VI 1974)

В серии работ Райса, завершенных в монографии ([1]), исследуются обладающие некоторыми специальными интерполяционными свойствами параметрические семейства функций, которые мы будем называть V-разрешимыми (varisolvent). Хотя и развита довольно общая теория наилучшего приближения функций элементами V-разрешимых семейств, как отмечается в ([1]), кроме рациональных дробей, известно весьма мало примеров таких семейств; в ([1]) приведен их полный список.

В настоящей заметке дается пример иного характера, чем указанные в ([1]). А именно, выделяется некоторое нелинейное выпуклое подмножество в совокупности многочленов по следующей системе Чебышева порядка n (T_n—системе).

Пусть $\{w_i\}_{i=0}^n$—строго положительные непрерывные на $[0;1]$ функции и

$$u_0(x)=w_0(x),$$

$$u_i(x)=w_0(x)\int\limits_0^x w_1(t_1)dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{i-1}} w_i(t_i)dt_i \tag{1}$$

$$(i=1,\ldots,n).$$

То, что $\{u_i\}_{i=0}^n$ образуют T_n—систему известно ([2]) и легко проверяется. В самом деле, замечая, что $v_i=(u_i/w_0)'$ $(i=1,\ldots,n)$ выражаются по формулам типа (1), допустим по индукции, что $\{v_i\}_{i=1}^n$ образуют T_{n-1}—систему. Тогда в силу теоремы Ролля многочлен $P(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_i u_i(x)$ по системе (1) имеет $\leq n$ нулей, так как

$$[P(x)/w_0(x)]'=\sum_{i=1}^n a_i v_i(x),$$

будучи многочленом по $\{w_i\}_{i=1}^n$, имеет $\leqslant n-1$ нулей. Множество всех многочленов по системе (1) будем обозначать через $\mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^n$.

Рассмотрим семейство $\mathbf{F}$ непрерывных по x и a функций $F(x,a)$, $x\in[0,1]$, $a\in Q\subset\mathbf{R}_{n+1}$.

Определение 1. Говорят, что $\mathbf{F}$ обладает Z—свойством порядка $r=r(a^*)$ в точке $a^*\in Q$, если для любых $a\in Q$, $a\neq a^*$, разность $F(x;a^*)-F(x;a)$ имеет $\leqslant r(a^*)$ нулей.

Определение 2. Семейство $\mathbf{F}$ называется локально разрешимым порядка $s=s(a^*)$ в точке $a^*\in Q$, если для любой последовательности точек $0\leqslant x_0<\dots<x_s\leqslant 1$ и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что из неравенств

$$|F(x_i;a^*)-y_i|<\delta \qquad (i=0,\dots,s)$$

следует, что существует такое $a\in Q$, для которого

$$F(x_i;a)=y_i \qquad (i=0,\dots,s),$$

$$|F(x;a^*)-F(x;a)|<\varepsilon \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

Определение 3. Семейство $\mathbf{F}$ называется V—разрешимым порядка n, если для любого $a^*\in Q$ порядок Z—свойства совпадает с порядком локальной разрешимости, причем

$$r(a^*)=s(a^*)\leqslant n;\quad r(a)\not\equiv\text{const.},\ a\in Q.$$

Для того, чтобы выделить V—разрешимое семейство в $\mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^n$ введем операторы

$$L_0f=f,\quad L_if=\left(\frac{L_{i-1}f}{w_{i-1}}\right)'\quad (i=1,\dots,n+1).$$

Если $P\in\mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^n$, то существуют и непрерывны все L_iP.

Теорема. *При любом k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ семейство*

$$\mathbf{F}_k=\{P\in\mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^{k-1}\}\cup\{P\in\mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^n:(L_kP)(x)\neq 0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}\tag{2}$$

является V-разрешимым порядка n.

В частности, для алгебраической системы $\{x^i\}_{i=0}^n$, которая соответствует случаю $w_0=1$, $w_i=i$ $(i=1,\dots,n)$, семейство $\mathbf{F}_k$ состоит из многочленов степени $\leqslant k-1$ и из тех многочленов степени $\geqslant k$, для которых $P^{(k)}(x)\neq 0$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

При доказательстве теоремы будет удобнее пользоваться другим описанием семейства $\mathbf{F}_k$. Положим

$$z_k(x)=w_k(x)$$

$$z_{k+l}(x)=w_k(x)\int_0^x w_{k+1}(t_{k+1})dt_{k+1}\dots\int_0^{t_{k+l-1}} w_{k+l}(t_{k+l})dt_{k+l}$$

$$(l=1,\dots,n-k).$$

Обозначим через $\mathbf{H}$ множество всех строго положительных на $[0; 1]$ многочленов по T_{n-k}—системе $\{z_{k+i}\}_{i=0}^{n}$. Зафиксируем $h \in \mathbf{H}$ и построим функцию

$$u_{k,h}(x) = w_0(x) \int_0^x w_1(t_1)dt_1 \ldots \int_0^{t_{k-2}} w_{k-1}(t_{k-1})dt_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} h(t_k)dt_k. \tag{3}$$

Функции $\{u_0, \ldots, u_{k-1}, u_{k,h}\}$ образуют T_n—систему, так как в роли w_k в формулах (1) здесь выступает $h(x)>0$. Обозначим через $\mathbf{R}_h$ множество всех многочленов

$$P_h(x; a) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_i(x) + a_k u_{k,h}(x). \tag{4}$$

Легко видеть, что $\mathbf{R}_h \subset \mathbf{R}\{w_i\}_{i=0}^{n}$. Действительно, полагая

$$h(x) = \sum_{i=k}^{n} b_i z_i(x) \tag{5}$$

и подставляя (5) в (3), получаем

$$u_{k,h}(x) = \sum_{i=k}^{n} b_i u_i(x). \tag{6}$$

Очевидно, мы имеем

$$z_{k+i}(x) = (L_k u_{k+i})(x) \quad (i = 0, \ldots, n-k), \quad (L_k u_{k,h})(x) = h(x),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F}_k = \bigcup_{h \in \mathbf{H}} \mathbf{R}_h.$$

Переходя к доказательству теоремы и рассматривая многочлен $P_{h_0}(x; a^*)$ вида (4), $h_0 \in \mathbf{H}$, будем различать два случая. Если $a^* = (a_0^*, \ldots, a_{k-1}^*, 0)$, то $r(a^*) = s(a^*) = k$. В самом деле, каковы бы ни были точки $0 \le x_0 < \ldots < x_k \le 1$, и числа $y_0, \ldots, y_k$ в $\mathbf{R}_h$ существует интерполяционный многочлен $P_{h_0}(x; a)$, для которого $P_{h_0}(x_i; a) = y_i$ $(i = 0, \ldots, k)$. Но так как его коэффициенты являются непрерывными функциями от y_i, то легко удовлетворить всем условиям определения 2, и следовательно $s(a^*) = k$. Так как при $a_k^* = 0$ многочлен $P_{h_0}(x; a^*) - P_h(x; a) \in \mathbf{R}_h$ при любом $h \in \mathbf{H}$, то $r(a_k^*) \le k$. Но, выбирая y_i по условию $y_i - P_{h_0}(x_i; a^*) = (-1)^i$, видим, что $r(a^*) = k$.

Теперь допустим, что $a^* = (a_0^*, \ldots, a_k^*)$, $a_k^* \neq 0$, и покажем, что при этом $r(a^*) = s(a^*) = n$. Записывая $h_0 \in \mathbf{H}$ в виде

$$h_0(x) = \sum_{i=k}^{n} b_{0i} z_i(x)$$

имеем

$$P_{h_0}(x; a^*) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^* u_i(x) + a_k^* \sum_{i=k}^{n} b_{0i} u_i(x).$$

Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы из неравенств

$$|b_{0i} - b_i| < \delta_0 \qquad (i = k, \ldots, n)$$

следовало, что определенный формулой (5) многочлен $h \in \mathrm{H}$. Пусть даны точки $0 \leq x_0 < \ldots < x_n \leq 1$ и число $\varepsilon > 0$. Для любых $y_0, \ldots, y_n$ существует многочлен

$$S(x;\, c) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x) \tag{7}$$

по системе (1), такой что

$$S(x_i;\, c) = y_i \qquad (i = 0, \ldots, n). \tag{8}$$

Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы неравенства

$$|P_{h_0}(x_i;\, a^*) - y_i| < \delta_1 \quad (i = 0, \ldots, n)$$

влекли за собой для многочлена (7), удовлетворяющего условиям (8), неравенства

$$|P_{h_0}(x;\, a^*) - S(x;\, c)| < \varepsilon \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

$$|a_k^* b_{0i} - c_i| < \delta_0 |a_k^*| \qquad (i = k, \ldots, n). \tag{9}$$

Если положить $c_i = a_k^* b_i$ $(i = k, \ldots, n)$ и определить h и $u_{k,h}$ формулами (5) и (6), то многочлен (7) можно написать в виде

$$S(x;\, c) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i u_i(x) + a_k^* u_{k,h}(x), \tag{10}$$

причем, благодаря (9), $h \in \mathrm{H}$, откуда, благодаря (10), следует, что $S(x;\, c) \in \mathrm{F}_k$. Таким образом, мы доказали, что $s(a^*) = n$.

Так как функции (1) образуют T_n-систему, то $r(a^*) \leq n$. Но если в предыдущем построении взять

$$y_i = P_{h_0}(x_i;\, a^*) + (-1)^i \frac{\delta_1}{2} \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

то $S(x;\, c) \in \mathrm{F}_k$ и разность $P_{h_0}(x;\, a^*) - S(x;\, c)$ будет менять знак $n+1$ раз, следовательно $r(a^*) = n$.

Ленинградский государственный
педагогический институт им. А. И. Герцена

Վ. Ս. ՎԻԴԵՆՍԿԻ

V-լուծելի բազմանդամների ընտանիքների մասին ըստ Չեբիշևի սիստեմի

Ըստ Չեբիշևի (1) սիստեմի բազմանդամների բազմությունում առանձնացվում է (2) հավասարությունով որոշվող F_k ընտանիքը։ Համաձայն (1)-ի, մտցվում է V-լուծելիության գաղափարը և ապացուցվում է, որ F_k ընտանիքը n-րդ կարգի V-լուծելի է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. R. Rice*, The approximation of functions. Nonlinear and multivariate theory, v. 2. Addison-Wesley publishing company, 1969. [2] *M. A. Рутман*, ДАН СССР, т. 164, 989—992, № 5 (1965).