ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 1

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Заргарян

Плоская задача теории упругости для односвязных областей с углами при заданных на границе внешних силах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 17/VI 1974)

Методы решения основных задач плоской теории упругости для областей с гладкой границей изложены в монографии Н. И. Мусхелишвили [1]. Используя интегралы в смысле Радона-Стилтьеса, Л. Г. Магнарадзе [2,3] обобщил интегральное уравнение Н. И. Мусхелишвили для первой и второй основных задач на случай областей с углами. Применяя интегральные преобразования в биполярных координатах, Я. С. Уфлянд [4,5] решил ряд задач плоской теории упругости, а также изгиба упругих тонких плит для областей, составляющих внутренность или внешность круговой луночки. Эффективный метод решения рассматриваемых задач предложил С. М. Белоносов [6], реализовав решения ряда практически важных задач. Интегральное уравнение С. М. Белоносова построено при помощи методов конформного отображения и одностороннего преобразования Лапласа.

В настоящей статье предлагается другой способ решения первой основной задачи плоской теории упругости для односвязных областей, контуры которых имеют угловые точки, основанный на непосредственном выделении локальных решений, возникающих в окрестности угловых точек контура и сведении решения к интегральному уравнению, относительно неизвестной плотности интегрального представления, которое является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауричелла.

1. Пусть конечная односвязная область S ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром L. Положим, что $a_j (j=1, 2, \ldots m)$ угловые точки контура, отличные от точек возврата.

Бигармоническую функцию $U(x,y)$ будем искать в виде

$$U(x,y) = U_0(x, y) + \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} U_j(x,y), \tag{1.1}$$

где

$$2U_0(x,y) = \chi(z) + \overline{\chi(z)} + \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} \tag{1.2}$$

представляет действительную функцию Гурса, а

$$U_j(x,y)=\chi_{1j}(z-a_j)+\chi_{2j}(\bar z-\bar a_j)+(\bar z-\bar a_j)\varphi_{1j}(z-a_j)+(z-a_j)\varphi_{2j}(\bar z-\bar a_j) \tag{1.3}$$

комплексную бигармоническую функцию переменной $z=x+iy$, описывающую напряженное состояние в окрестности вершин сектора, образованного касательными, проведенными к контуру L и точке a_j.

Полагая, что в (1.3) $z-a_j=r_je^{i\theta_j}$ и что

$$\chi_{1j}(z-a_j)=d_{1j}(z-a_j)^{\lambda_j+1}, \quad \chi_{2j}(z-a_j)=d_{2j}(z-a_j)^{\lambda_j+1},$$

$$\varphi_{1j}(z-a_j)=d_{3j}(z-a_j)^{\lambda_j}, \quad \varphi_{2j}(z-a_j)=d_{4j}(z-a_j)^{\lambda_j}, \tag{1.4}$$

получаем

$$U_j(r_j,\theta_j)=r_j^{\lambda_j+1}[b_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta_j+b_{2j}\cos(\lambda_j+1)\theta_j+b_{3j}\sin(\lambda_j-1)\theta_j+$$
$$+b_{4j}\cos(\lambda_j-1)\theta_j] \tag{1.5}$$

где

$$b_{1j}=i(d_{1j}-d_{2j}), \quad b_{2j}=d_{1j}+d_{2j},$$

$$b_{3j}=i(d_{3j}-d_{4j}), \quad b_{4j}=d_{3j}+d_{4j}, \tag{1.6}$$

i — мнимая единица.

Следуя Вильямсу ([?]), удовлетворяя с помощью (1.5) однородным условиям для напряжений на прямолинейных сторонах $\theta_j=\alpha_j$ и $\theta_j=\beta_j$, где $(\beta_j-\alpha_j)$ — угол, образованный касательными к контуру в точке a_j, причем $0<\beta_j-\alpha_j\leq 2\pi$, получаем систему четырех однородных уравнений для определения коэффициентов b_{kj} ($k=1,2,3,4$; $j=1,2,\ldots m$). Требование наличия нетривиального решения у этой системы приводит к характеристическому уравнению относительно λ_j:

$$\sin^2\lambda_j(\beta_j-\alpha_j)=\lambda_j^2\sin^2(\beta_j-\alpha_j). \tag{1.7}$$

Учитывая, что ранг матрицы указанной однородной системы равен трем, нетривиальные решения системы имеют вид

$$b_{1j}=X_{1j}b_{4j}, \quad b_{2j}=X_{2j}b_{4j}, \quad b_{3j}=X_{3j}b_{4j},$$

где

$$\Delta X_{1j}=\lambda_j(\lambda_j-1)\sin[(\lambda_j-1)\beta_j+2\alpha_j]-(\lambda_j-1)\sin[(\lambda_j-1)\beta_j-2\alpha_j\lambda_j]-$$
$$-(\lambda_j^2-1)\sin(\lambda_j+1)\beta_j,$$

$$\Delta X_{2j}=-(\lambda_j^2-1)\cos(\lambda_j+1)\beta_j+\lambda_j(\lambda_j-1)\cos[(\lambda_j-1)\beta_j+2\alpha_j]+$$
$$+(\lambda_j-1)\cos[(\lambda_j-1)\beta_j-2\alpha_j\lambda_j],$$

$$\Delta X_{3j}=\lambda_j(\lambda_j+1)\sin[(\lambda_j+1)\beta_j-2\alpha_j]+(\lambda_j+1)\sin[(\lambda_j+1)\beta_j-2\alpha_j\lambda_j]-$$
$$-(\lambda_j^2-1)\sin(\lambda_j-1)\beta_j,$$

$$\Delta=\lambda_j(\lambda_j+1)\cos[(\lambda_j+1)\beta_j-2\alpha_j]-(\lambda_j+1)\cos[(\lambda_j+1)\beta_j-2\alpha_j\lambda_j]-$$
$$-(\lambda_j^2-1)\cos(\lambda_j-1)\beta_j. \tag{1.8}$$

Комплексный корень λ_j характеристического уравнения (1.7) с наименьшей положительной действительной частью, будет харктеризовать поведение решения в угловой точке, в окрестности которой при $\operatorname{Re}\lambda_j<1$ напряжения будут обладать особенностью порядка $1-\operatorname{Re}\lambda_j$. Как показано в работе А. И. Каландия ([8]), получение характеристиского уравнения (1.7) с помощью функции вида (1.2) возможно лишь при формальном предположении о действительности λ_j. Благодаря применению функции вида (1.3) характеристическое уравнение (1.7), а также коэффициенты соответствующей однородной системы получаются в предположении комплексности λ_j.

Выражение для главного вектора усилий, приложенных к дуге контура от фиксированной точки t_0 до переменной точки t, на основании (1.1), (1.2) и (1.3) будет иметь вид ([1])

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)U=\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+\sum_{j=1}^{m}\Big\{\varphi_{1j}(t-a_j)+(t-a_j)\overline{\varphi'_{1j}(t-a_j)}+$$

$$+\overline{\psi_{1j}(t-a_j)}+\overline{\varphi_{2j}}(t-a_j)+(t-a_j)\varphi'_{2j}(\overline{t}-\overline{a_j})+\psi_{2j}(\overline{t}-\overline{a_j})\Big\}=$$

$$=i\int_{t_0}^{t}(X_n+iY_n)ds+C_0, \tag{1.9}$$

где $\varphi_{1j}(z-a_j)$, $\varphi_{2j}(z-a_j)$, $\psi_{1j}(z-a_j)=\chi'_{1j}(z-a_j)$ и $\psi_{2j}(z-a_j)=\chi'_{2j}(z-a_j)$

определяются по (1.4), $(X_n+iY_n)ds$ — главный вектор внешних усилий, приложенных к элементу дуги контура ds с внешней нормалью n, а C_0 — комплексная постоянная, которая в рассматриваемом случае односвязной области может быть положена равной нулю.

Обозначая

$$\varphi_j(z)=\varphi_{1j}(z-a_j)+\overline{\varphi_{2j}}(z-a_j),\quad \psi_j(z)=\chi'_{1j}(z-a_j)+\chi'_{2j}(z-a_j),$$

$$f(t)=i\int_{t_0}^{t}(X_n+iY_n)\,ds, \tag{1.10}$$

условие (1.9) можно написать в виде

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+\sum_{j=1}^{m}\left\{\varphi_j(t)+(t-a_j)\overline{\varphi'_j(t)}+\overline{\psi_j(t)}\right\}=f(t), \tag{1.11}$$

которое и является граничным условием для первой основной задачи для односвязной области при наличии у ее контура m угловых точек.

Вводя обозначения

$$\varphi^*(z)=\varphi(z)+\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(z),$$

$$\psi^*(z)=\psi(z)+\sum_{j=1}^{m}\left\{\psi_j(z)-\overline{a_j}\varphi'_j(z)\right\} \tag{1.12}$$

граничное условие (1.11) приводим, в частности, к обычному виду ([1])

$$\varphi^*(t)+t\overline{\varphi^{*\prime}(t)}+\overline{\psi^*(t)}=f(t) \tag{1.13}$$

Учитывая (1.4), (1.6), (1.8) и (1.10) граничное условие (1.11) записываем так

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left\{b_{4j}\xi_j(t)+\overline{b_{4j}\eta_j(t)}\right\}. \tag{1.14}$$

где

$$2\xi_j(t)=(1-iX_{1j})(t-a_j)^{\lambda_j}+\lambda_j(1+iX_{3j})(t-a_j)(\overline{t}-\overline{a_j})^{\lambda_j-1}+$$

$$+(\lambda_j+1)(X_{2j}+iX_{1j})(\overline{t}-\overline{a_j})^{\lambda_j},$$

$$2\eta_j(t)=\overline{\lambda_j}(1+i\overline{X_{3j}})(t-a_j)(\overline{t}-\overline{a_j})^{\overline{\lambda_j}-1}+(\overline{\lambda_j}+1)(\overline{X_{2j}}+i\overline{X_{1j}})(\overline{t}-\overline{a_j})^{\overline{\lambda_j}}+$$

$$+(1-i\overline{X_{3j}})(t-a_j)^{\overline{\lambda_j}}.$$

Для решения поставленной задачи необходимо определить голоморфные в S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также m комплексных постоянных b_{4j} из условия (1.14).

2. Следуя Д. И. Шерману (9), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau-z},$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega(\tau)}d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(\tau)d\overline{\tau}}{\tau-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\tau}\omega(\tau)d\tau}{(\tau-z)^2}, \tag{2.1}$$

где $\omega(\tau)$ — подлежащая определению непрерывная комплексная функция точки границы, имеющая интегрируемую производную. Обобщение представлений (2.1) на случай кусочно-гладкой линии интегрирования возможно на основании результатов, приведенных в монографии (10).

Интегрируя второе из представлений (2.1) по частям, получаем

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega(\tau)}-\overline{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{2.2}$$

Учитывая, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, определяемые по формулам Сохоцкого—Племеля, в угловой точке a_j линии L имеют устранимый разрыв, будем приписывать в точке a_j функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предельные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, когда точка z стремится к узлу a_j по дуге L_{j-1} или L_j. Эти предельные значения равны между собой ввиду непрерывности $\omega(t)$. Переходя в первом из формул (2.1) и в (2.2) к пределу и подставив их значения в (1.12), получаем

$$\omega(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\omega(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\overline{\omega(\tau)}d\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}=f(t)-\sum_{j=1}^{m}\left\{b_{4j}\xi_j(t)+\overline{b_{4j}}\eta_j(t)\right\}. \tag{2.3}$$

Это уравнение является обобщением интегрального уравнения Шермана-Лауричелла, на случай областей с кусочно-гладкой границей.

Обозначив через $\overline{\tau}=f_j(\tau)$ уравнения гладких дуг L_j, легко видеть, что с помощью разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в виде определенного интеграла, ядра уравнения (2.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}=\frac{\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]\lambda d\lambda-\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]d\lambda}{\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]d\lambda}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}\right)=\frac{\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]\lambda d\lambda-\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]d\lambda}{\left(\int\limits_0^1 f_j[\tau-\lambda(\tau-t)]d\lambda\right)^2} \tag{2.4}$$

если τ и t одновременно принадлежат L_j. Из (2.4) следует, что ядра уравнения (2.3) в угловых точках контура имеют конечные разрывы и, следовательно, для этого уравнения имеет место альтернатива Фредгольма. Заметим что в (2.4) функция $f_j(\tau)$ отлична от уравнения прямой, так как в этом случае ядра (2.4) тождественно равны нулю, если τ и t одновременно принадлежат L_j.

Учитывая равносильность уравнений (1.4) и (2.3), коэффициенты b_{ij} будем определять как функционалы из условий

$$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\left\{\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right\}d\bar t=\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)d\bar t-\sum_{i=1}^{m}\left\{b_{ij}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\xi_j(t)d\bar t+\right.$$

$$\left.+\overline{b_{ij}}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\eta_{ij}(t)\,d\bar t\right\}, \tag{2.5}$$

$k=1,2,\dots m$, причем $a_{m+1}=a_1$.

Определитель этой системы отличен от нуля, так как, как это будет показано ниже, при $f(t)=0$, однородная система допускает только тривиальное решение.

Складывая уравнения системы (2.5), получаем равенство, в действительной части которого содержится выражение главного момента внешних сил, приложенных к L, который полагается равным нулю, т. е.

$$\mathrm{Re}\int\limits_L f(t)d\bar t=0. \tag{2.6}$$

Следовательно, определяемые из этой системы функционалы b_{ij} учитывают требование равенства нулю главного момента внешних сил.

„В случае действительности c_j, действительные функционалы b_{ij} будем определять из действительной части (2.3). Можно показать, что функционалы b_{ij} могут иметь другие представления, отличные от определяемых по (2.5)".

3. Докажем разрешимость уравнения (2.3). Наряду с уравнением (2.3), следуя Д. И. Шерману (⁶), будем рассматривать уравнение

$$\varphi^*(t)+t\overline{\varphi^{*\prime}(t)}+\overline{\psi^*(t)}+b\left[\frac{1}{t-z_0}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{z}_0}+\frac{t-z_0}{(\bar{t}-\bar{z}_0)^2}\right]=f(t), \qquad (3.1)$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ определяются по (1.12), $z_0 \in S$, а

$$b=\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int_L \frac{\omega(\tau)d\tau}{(\tau-z_0)^2}. \qquad (3.2)$$

Умножая обе части (3.1) на $d\bar{t}$ и интегрируя по L, получаем

$$\int_L \left\{\varphi^*(t)d\bar{t}-\overline{\varphi^*(t)dt}\right\}+b\int_L\left(\frac{d\bar{t}}{t-z_0}+\frac{dt}{\bar{t}-\bar{z}_0}\right)+2\pi i b=\int_L f(t)\,d\bar{t}.$$

Из этого равенства, с учетом (2.6) и (3.2), видно, что $b=0$.

Следовательно, имея в виду (1.12), можно утверждать, что уравнение (3.1) равносильно интегральному уравнению (2.3).

Покажем, что однородное уравнение

$$\omega_0(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega_0(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega_0(\tau)}d\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}=-\sum_{j=1}^{m}\left[b^0_{4j}\xi_j(t)+\bar{b}^0_{4j}\eta_j(t)\right], \qquad (3.3)$$

полученное из (2.3) при $f(t)=0$ не имеет решений, отличных от тривиального. Пусть $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ функции, определяемые по (2.1) посредством плотности $\omega_0(\tau)$, удовлетворяют на L, согласно (1.11), условию

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}+\sum_{j=1}^{m}\left[\varphi^0_j(t)+(t-a_j)\overline{\varphi^{0\prime}_j(t)}+\overline{\psi^0_j(t)}\right]=0, \qquad (3.4)$$

равносильному уравнению (3.3). Функции $\varphi^0_j(z)$ и $\psi^0_j(z)$ определяются по формулам (1.10), в которых, на основании (1.4), (1.6) и (1.8), вместо функционалов b_{1j} следует подразумевать функционалы b^0_{1j}. Имея в виду обозначения (1.12), уравнения (3.3) и (3.4) равносильны также однородному уравнению

$$\varphi^*_0(t)+t\overline{\varphi^{*\prime}_0(t)}+\overline{\psi^*_0(t)}=0, \qquad (3.5)$$

полученному из (3.1), с учетом того, что $b=0$.

На основании теоремы единственности ([11]) и условия (3.5) имеем, что

$$\varphi^*_0(z)=i\varepsilon z+c, \qquad \psi^*_0(z)=-\bar{c}. \qquad (3.6)$$

Согласно (2.1), (2.2), (1.10), (1.4), (1.6), (1.8) и (3.6), равенства (1.12) можно переписать так:

$$i\varepsilon z+c=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[b^0_{4j}(1-iX_{3j})(z-a_j)^{\lambda_j}+\overline{b^0_{4j}}(1+i\overline{X_{3j}})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j}\right],$$

$$-c=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\overline{\omega_0(\tau)}-\bar{\tau}\omega_0'(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\{b^0_{4j}[(\lambda_j+1)(X_{2j}-iX_{1j})(z-a_j)^{\lambda_j}-$$

$$-\bar{a}_j(1-iX_{3j})\lambda_j(z-a_j)^{\lambda_j-1}]+\overline{b^0_{4j}}[(\bar{\lambda}_j+1)(\overline{X_{2j}}-i\overline{X_{1j}})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j}-$$

$$-\bar{a}_j\bar{\lambda}_j(1+iX_{3j})(z-a_j)^{\bar{\lambda}_j-1}]\}. \qquad (3.7)$$

Вследствие однозначности интегралов типа Коши, входящих в (3.7) заключаем, что

$$b_{1j}^0 = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots m) \tag{3.8}$$

Следовательно $\quad \varphi_0^*(z) = \varphi_0(z)$ и $\psi_0^*(z) = \psi_0(z)$.

Учитывая еще, что на основании первого из представлений (2.1) и равенства (3.2), для случая, когда вместо $\omega(\tau)$ подразумевается $\omega_0(\tau)$ следует, что

$$2i\,\mathrm{Im}[\varphi_0^*(z_0)] = 2i\,\mathrm{Im}[\varphi_0^{**}(z_0)] = 2i\varepsilon = 0,$$

равенства (3.7) принимают вид:

$$c = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$-\bar{c} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\overline{\omega_0(\tau)} - \bar{\tau}\omega_0'(\tau)\right] \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{3.9}$$

Обозначив

$$i\delta(\tau) = \omega_0(\tau) - c \tag{3.10}$$

$$i\gamma(\tau) = \overline{\omega_0(\tau)} - \bar{\tau}\,\omega_0'(\tau) + \bar{c} \tag{3.11}$$

легко видеть, что равенства (3.9) равносильны условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\delta(\tau)d\tau}{\tau - z} = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\tau - z} = 0 \qquad \text{для } z \in S,$$

из которых следует, что функции $\delta(z)$ и $\gamma(z)$ голоморфны вне S, причем $\qquad \delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0.$

Исключая, далее, $\omega_0(\tau)$ из (3.10) и (3.11), получаем

$$\overline{\delta(t)} + \bar{t}\delta'(t) + \gamma(t) = -2i\bar{c}, \tag{3.12}$$

которое является граничным условием первой основной задачи для бесконечной области, составляющей внешность L, при отсутствии внешних сил.

Пользуясь в отношении (3.12) рассуждениями, которые привели к решению (3.6) задачи (3.5), учитывая также, что $\delta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$, получаем $\delta(z) = \gamma(z) = c = 0$, а следовательно и $\omega_0(\tau) = 0$.

В заключение отметим, что вышеизложенное с незначительными изменениями применимо к бесконечной односвязной области с углами.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Ս. ՉԱՐԴԱՐՅԱՆ

Առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը միակապ անկյուններով տիրույթի համար արտաքին ուժերի ազդեցության տակ

Հոդվածում առաջարկվում է մի նոր եղանակ առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը լուծելու համար, երբ միակապ տիրույթն ունի վերջավոր թվով անկյուններ։

Նախապես անջատելով անկյունային կետերում առաջացող տեղական լուծումները, խնդրի լուծումը բերվում է մի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, որը հանդիսանում է Շերման-Լաուրիչելլայի ինտեգրալ հավասարման ընդհանրացումը։

Ապացուցվում է այդ հավասարման լուծելիությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд «Наука», М., 1966. [2] *Л. Г. Магниридзе*, ДАН СССР, т. XVI, № 3, (1937). [3] *Л. Г. Магнарадзе*, ДАН СССР, т. XIX, № 9 (1938). [4] *Я. С. Уфлянд*, Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М.—Л., 1950. [5] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, изд. «Наука». Л., 1968. [6] *С. М. Белоносов*, Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей, Новосибирск, Изд. сиб. отд. АН СССР, 1962. [7] *M. L. Williams*, J. of Appl. Mech., vol. 19, No 4, (1952). [8] *А. И. Каландия*, ПММ, т. 33, вып. 1, (1969). [9] *Д. И. Шерман*, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1 (1940). [10] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, изд. „Наука“, М. 1968. [11] *С. Г. Михлин*, Труды сейсмологического института АН СССР №65, 1935.