

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

В. А. Нерсисян

Интегральная геометрия на многообразии k -мерных плоскостей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 27/IX 1974)

1. Настоящая работа является непосредственным продолжением работы (1). Здесь задача интегральной геометрии решается для случая произвольных k -мерных плоскостей в R^n ($k=2p$ и не обязательно $k=n-1$). Здесь в более полной мере, чем это делалось раньше, используется дифференциальное исчисление Картана.

2. Рассмотрим каноническое двойное расслоение

$$\begin{array}{ccc} & M_{k,n}^* & \\ \swarrow & & \searrow \\ R^n & & H_{k,n} \end{array} \quad (1)$$

где $H_{k,n}$ — многообразие всех k -мерных ориентированных плоскостей h в R^n , $M_{k,n}^*$ — многообразие инцидентных пар $[(Q, h)/Q \in R^n]$, где α — размерность этого многообразия.

Пусть f функция на R^n . В силу (1) f будет функцией и на $M_{k,n}^*$. Интегрируя f по k -мерным плоскостям мы получаем функцию $\varphi(h)$ на $H_{k,n}$. Надо восстановить f по $\varphi(h)$.

3. Пусть S класс бесконечно дифференцируемых функций быстро убывающих вместе с производными до порядка $n-1$ включительно. К каждой точке пространства присоединим семейство ортонормированных реперов. Уравнения инфинитезимального перемещения репера будут

$$d\vec{M} = \omega^l \vec{e}_l \quad (2)$$

$$d\vec{e}_i = \omega_k^i \vec{e}_k \quad i, k, l = 1, \dots, n, \quad (3)$$

причем

$$\omega_k^i + \omega_i^k = 0. \quad (4)$$

Формы ω^i, ω_k^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i \quad (5)$$

$$d\omega_k^l = -\omega_e^l \wedge \omega_k^e. \quad (6)$$

Пусть $f \in S$ функции на R^n . Тогда

$$df = f_l \omega^l. \quad (7)$$

При n -ом продолжении этого уравнения мы найдем

$$df_{i_1 \dots i_n} = f_{i_1 \dots i_{n-1} e} \omega_{i_n}^e + \dots + f_{e i_1 \dots i_{n-1}} \omega_{i_n}^e + f_{i_1 \dots i_{n-1} e} \omega_e^e. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $k=2$, $n=4$. С каждым плоским элементом (Q, h) многообразия $M_{2,1}^n$ присоединим ортонормированные реперы $\{\bar{e}_i\}$ $i=1, \dots, 4$ так, чтобы векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ лежали в плоскости h . Главными формами на $M_{2,1}^n$ будут ω^l , ω_N^s $l, s=3, 4$ $N=1, 2$. Рассмотрим форму

$$\bar{\eta} = f_{\lambda\lambda} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^3.$$

$\bar{\eta}$ — не замкнутая форма на многообразии $M_{2,1}^n$. Пусть $M \in h$. Вектор $\bar{e}_1$ направим по $M\bar{Q}$. Тогда $\bar{Q} = \bar{M} + i\bar{e}_1$. Дифференцируя это соотношение и применяя (2) — (4) получаем

$$d\bar{Q} = (\omega^1 + d\iota)\bar{e}_1 + (\omega^2 + \lambda\omega_1^2)\bar{e}_2 + (\omega^3 + \lambda\omega_1^3)\bar{e}_3 + (\omega^4 + \lambda\omega_1^4)\bar{e}_4.$$

Если фиксировать точку Q , получим

$$\begin{aligned} \omega^1 + d\iota &= 0 & \omega^2 + \lambda\omega_1^2 &= 0 \\ \omega^3 + \lambda\omega_1^3 &= 0 & \omega^4 + \lambda\omega_1^4 &= 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Уравнениями (A) выделяется некоторое подмногообразие $D_\lambda(Q)$. Последние два уравнения $\omega^3 + \lambda\omega_1^3 = 0$ накладывают на главные формы ω^s , ω_1^s два условия. Рассмотрим в $D_\lambda(Q)$ двухпараметрическое семейство плоскостей, проходящее через точку Q . Обозначим это новое подмногообразие через $D_\lambda(Q)$. В остальных точках R^4 это параллельно перенесем. Обозначим его через D . На $D_\lambda(Q)$ форма $\bar{\eta}$ будет замкнутой.

Теорема 1'. Пусть $\bar{\eta} = \bar{\eta}|_{D_\lambda(Q)}$. Тогда $\int_{D_\lambda(Q)} \bar{\eta} = c' f(Q)$, где c' — некоторая не однозначная постоянная.

Доказательство. $\bar{\eta}$ — точная форма на части подмногообразия $D_\lambda(Q)$ выделяемой условием $\lambda \neq 0$. Действительно

$$\bar{\eta} = -d \left\{ \frac{f_\lambda}{\lambda} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_2^3 + \frac{f}{\lambda} \omega^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \right\}.$$

Форму $\bar{\eta}$ будем интегрировать не по всему $D_\lambda(Q)$, а по части $\widetilde{D_\lambda(Q)}$ вырезанной четырехмерной сферой радиуса $\lambda = \lambda_0$ с центром в точке Q . Множество плоских элементов с центром на сфере есть некоторое

подмногообразие в $D_4(Q)$ и оно является границей $\widetilde{\partial D_4(Q)}$. Если применить теорему Стокса, учесть, что на $\widetilde{\partial D_4(Q)}$ $\omega^1 = 0$, интегрировать повторно, то при $\lambda_0 \rightarrow 0$ получим

$$\int_{D_4(Q)} \bar{\omega} = f(Q) \int_{\Gamma} \omega_1^2 \wedge (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1),$$

где Γ — многообразие элементов, образованных двумерной плоскостью, проходящей через Q , и единичным вектором в этой плоскости. Γ — состоит из всех элементов, двумерные плоскости которых принадлежат многообразию γ , при помощи которого $D_4(Q)$ выделено из $D_4(Q)$. Интегрируя сферно ω_1^2 по множествам векторов, лежащих в одной плоскости, получаем 2π , затем надо интегрировать $\int_{\Gamma} (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1)$.

Легко проверить что $d(\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1) = 0$, следовательно подинтегральная форма $\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1$ замкнутая. Отсюда следует, что значение интеграла $\int_{\Gamma} (\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^4 \wedge \omega_2^1)$ вычисляется не однозначно, а зависит лишь от класса гомологий, откуда берется соответствующий цикл γ .

4. Перейдем к случаю, когда k и n любые (k — четное). Прежде всего выделим подмногообразие, по которому будем интегрировать форму. Присоединим с каждой точкой k -мерной плоскости h семейство ортонормированных реперов $\{e_i\}$ $i=1, \dots, n$ так, чтобы векторы $\{e_N\}$ $N=1, \dots, k$ лежали в плоскости h . Пусть $M \in h$. Направляя $\vec{e}_1$ по $\vec{MQ}$ и фиксируя точку Q мы выделим некоторое подмногообразие в $M_{k,n}^*$ уравнениями

$$\begin{aligned} \omega^1 + d\lambda = 0, \quad \omega^2 + \lambda \omega_1^2 = 0, \quad \dots, \quad \omega^k + \lambda \omega_1^k = 0, \\ \omega^{k+1} + \lambda \omega_1^{k+1} = 0, \quad \dots, \quad \omega^n + \lambda \omega_1^n = 0. \end{aligned}$$

Последние $n-k$ уравнений накладывают некоторые условия на главные формы ω^a, ω_1^a . В этом подмногообразии выделим k -параметрическое семейство плоскостей в точке Q . Обозначим его через $D_k(Q)$, а в остальных точках R^n параллельно перенесем их.

Теорема 1. Пусть $f \in S$ функция на R^n . Рассмотрим форму $\Omega = f_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_1^{\alpha_k}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_k = k+1, \dots, n$ на многообразии $M_{k,n}^*$ ($\alpha = k + (k-1)(n-k)$). Если k — четно, то

$$\int_{D_k(Q)} \bar{\Omega} = c_{1Q} f(Q),$$

где c_1 — отличная от нуля постоянная, которая зависит от

класса гомологии, которому принадлежит цикл γ_Q (γ — произвольный k -мерный цикл в грассмановом многообразии, т. е. в многообразии k -мерных плоскостей, проходящих через точку Q).

5. После интегрирования функции f по слоям расслоения $M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$ мы получили функцию $\varphi(h)$ на многообразии плоскостей. Нам надо было по этим функциям $\varphi(h)$ восстановить функцию f . Мы сейчас покажем, что эта задача сводится к применению теоремы 1. Главными формами на $H_{k,n}$ будут

$$\omega^\alpha, \omega_N^\alpha \quad \alpha, \beta = k+1, \dots, n \quad L, N = 1, \dots, k.$$

Пусть на $H_{k,n}$ задана функция φ . Тогда

$$d\varphi = \varphi_\alpha \omega^\alpha + \varphi_N^\alpha \omega_N^\alpha. \quad (9)$$

Если дифференцировать эти соотношения внешним образом и применить лемму Картана, получим

$$\Delta \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} \omega^\beta + \varphi_{\alpha N}^N \omega_N^N$$

$$\Delta \varphi_N^\alpha = \varphi_{N\beta}^\alpha \omega^\beta + \varphi_{NL}^{\alpha L} \omega_L^L.$$

При k -ом продолжении уравнения (9) получим и такие уравнения

$$\Delta \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha} \omega^\alpha + \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} N}^N \omega_N^N.$$

Оказывается, что $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{\alpha_k}$ форма на многообразии $H_{k,n}$. Мы построили дифференциальный оператор

$$\bar{\Delta} : \varphi \rightarrow \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \omega_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{\alpha_k},$$

который каждой функции на $H_{k,n}$ ставит в соответствии форму на этом же многообразии $H_{k,n}$.

6. Примем выше сказанное для нашей задачи. Векторное поле на $H_{k,n}$ определяется компонентами ξ^α, ξ_N^α . Назовем векторное поле нормальным, если $\xi_N^\alpha = 0$. На $M_{k,n}^*$ векторное поле определяется компонентами $\eta^\alpha, \eta^\alpha, \eta_N^\alpha$. Из инвариантности системы $\omega_N^\alpha = 0, \omega^\alpha = 0$ следует, что при $\eta^\alpha = 0, \eta_N^\alpha = 0$ получим определенное векторное поле, которое назовем нормальным. Нормальные векторные поля согласованные (см. (1)) и следовательно, определяются своими компонентами ξ^α . Назовем дифференциальный оператор нормальным, если он порожден нормальными векторными полями. Кроме двойного расслоения (1) мы имеем и расслоение $F(R^n) \rightarrow M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$, где $F(R^n)$ — расслоение ортонормированных реперов. Как f , так и $\varphi(h)$ являются функциями и на $F(R^n)$. Векторное поле на $F(R^n)$ назовем нормальным, если оно определяется своими компонентами ξ^α , а остальные компоненты равны нулю. Тем самым мы имеем согласованное векторное поле на двойном расслоении $F(R^n) \rightarrow M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$. Нами был построен дифференциальный оператор, который каждой функции на $H_{k,n}$ ставил в соответствие форму на $H_{k,n}$ (и значит на $F(R^n)$). Этот дифференциальный оператор нормальный, а поля согласованные.

Применяя теорему 2 о дифференцировании интеграла по параметру из (1) получаем

$$\varphi_{a_1 \dots a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} = \int_A f_{a_1 \dots a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} \wedge \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k}.$$

Если интегрировать эти формы по циклам γ , о которых была речь выше, найдем

$$\int_{\gamma} \varphi_{a_1 \dots a_k} \omega_1^{a_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{a_k} = \int_{D(\gamma)} \Omega,$$

т. е. пришли на самом деле к теореме 1.

Основная теорема. Пусть $f \in S$ на R^n и пусть $\varphi = \int_A f$ функция на $H_{k,n}$, полученная интегрированием f по k -мерным плоскостям. Тогда при четном k имеет место следующая теорема обращения:

$$\int_{\gamma_Q} \bar{\Delta} \varphi = c_{\gamma_Q} f(Q),$$

где интеграл берется по произвольному k -мерному циклу в слое расслоенного пространства $M_{k,n}^* \rightarrow R^n$ над точкой $Q \in R^n$. Множитель c_{γ} — зависит только от класса гомологии, которому принадлежит цикл γ , причем он не равен тождественно нулю.

Автор выражает свою благодарность А. М. Васильеву за полезные советы и за внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Ա. ԴԻՄԻՏՐԵՎՆԻ

Ինտեգրալ երկրաչափությունը k -չափանի հարթությունների
բազմաձևություն վրա

Աշխատանքում արված է k -չափանի հարթություններով (k -գույն է) ֆունկցիայի ինտեգրալի միջոցով ֆունկցիայի վերականգնման խնդրի նոր ապացույցը, որը դիտարկված է Ի. Մ. Գելֆանդի, Մ. Ի. Գրանի և Ջ. Ե. Զապիրոյի կողմից (Մադոնի խնդրի ընդհանրացումը):

Խող S -ը R^n -ում անվերջ դիֆերենցելի այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք արագ նվազում են մինչև իրենց $(n-1)$ -րդ կարգի ածանցյալների հետ ներառելով k -չափանի և հարթությունների հետ կցվում են $|e_i|$ $i=1, \dots, n$ որին նորմալիզացված սեպերների բնութանըն ալնպես, որ $(e_N) \in h$ $N=1, \dots, k$ նշանակենք $M_{k,n}^* = \{(Q, h) | Q \in h \simeq R^k\}$ հարթ էլեմենտների բազմաձևությունը, $H_{k,n}$ -ով բոլոր կողմնորոշված k -չափանի հարթությունների բազմությունը, եթե $f \in S$ -ը ինտեգրենք $M_{k,n}^* \rightarrow H_{k,n}$ շերտավորված տարածություն ընդհանրով, կստանանք $\varphi(h) = \int_A f$ ֆունկցիա, որոշված $H_{k,n}$ -ում: Ան-

հրաժեշտ է $\varphi(k)$ -ի միջոցով վերականգնել f -ը: Նախորդը ապացուցվում է որ հիմն ինտեգրենք

$$\Omega = f_{x_1 \dots x_k} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k \wedge \omega_1^{x_1} \wedge \dots \wedge \omega_k^{x_k} \quad x_1, \dots, x_k = k+1, \dots, n$$

Ֆորմը $D_k(Q)$ բազմաձևությամբ, որը Q կետով անցնող k պարամետրների կախված հարթությունների բազմությունն է՝ առանձնացված հետևյալ հավասարումներով $\omega^1 + d\tau = 0, \quad \omega^2 + i\omega_1 = 0, \quad \alpha = 2, \dots, n$, ապա կատանանք

$$\int_{D_k(Q)} \Omega = cf(Q), \quad \text{որտեղ } c\text{-ն } d\text{-ի արժեքն է և կախված է այն հոմո-$$

լոգիաների խմբից, որին պատկանում է γ ցիկլը:

Խնդրի ընդհանուր լուծումը բերվում է այդ արդյունքի կիրառմանը: Հիմնական թեորեմ.—Թող $f \in S$ ֆունկցիա է R^n -ում և բող $\varphi = \int$

ֆունկցիա է $H_{k,n}$ -ում: Եթե k զույգ է, ապա՝

$$\int_{\gamma_Q} \Delta \bar{f} = c_{\gamma_Q} f(Q),$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է $M_{k,n}^+ \rightarrow H_{k,n}$ շերտավորված տարածության $Q \in R^n$ կետի վրայի կամայական k -չափակի ցիկլով: c_{γ} -ն կախված է միայն հոմոլոգիաների այն դասից, որին պատկանում է γ ցիկլը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. А. Нерсисян, ДАН Арм. ССР, т. 59, № 3, (1974). ² И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Э. Я. Шнуров, ДАН СССР, № 6, 1236—1238, 1966.