ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 1

УДК 517.91

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян

Исследование устойчивости колебаний линейных периодических возвратных систем

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 5/VI 1974)

Построению границ областей неустойчивости для возвратных ([1]) и, в основном, для канонических систем посвящены работы ([1–12]). Здесь приводится новый способ построения, позволяющий дать удобное аналитическое представление для границ. Получены в общем виде условия устойчивости.

1. Рассматривается система дифференциальных уравнений вида ([12]).

$$[E+\mu Q(\theta t)]\frac{d^2Y}{dt^2}+\mu N(\theta t)\frac{dY}{dt}+[C+\mu P(\theta t)]Y=0, \quad \mu>0. \tag{1.1}$$

Здесь Y — m-мерный вектор, θ, μ — вещественные параметры, $m\times m$ — матрицы $Q(\tau)$, $N(\tau)$, $P(\tau)$ — периодичны по τ и разлагаются в ряды Фурье:

$$Q(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k e^{ik\tau}, \quad N(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_k e^{ik\tau}, \quad P(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{ik\tau},$$

где матричные коэффициенты

$$Q_k=\|q_{js}^{(k)}\|_1^m, \qquad N_k=\|v_{js}^{(k)}\|_1^m, \qquad P_k=\|\pi_{js}^{(k)}\|_1^m \tag{1.2}$$

удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2\|Q_k\|<\infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\|N_k\|<\infty, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|P_k\|<\infty.$$

Матрица C — диагональная с элементами ω_j^2 ($\omega_j>0$; $j=1,\ldots,m$).

Ищем решение системы (1.1) в виде ряда

$$Y=e^{\rho t}\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_s e^{is\theta t}.$$

Для векторов Y_s получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$[E(p+k\theta i)^2+C]Y_k-\mu\sum_{s=-\infty}^{\infty} M_{s-k}(p+s\theta i)Y_s=0 \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots), \tag{1.3}$$

где $\quad M_k(p)=Q_{-k}p^2+N_{-k}p+P_{-k} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. (1.4)

При $\mu=0$ система (1.1) имеет характеристические показатели $\pm i\omega_j$ $(j=1,\ldots,m)$. Известно ([1]), что резонанс в возвратной системе возможен при достаточно малых $\mu>0$, $|\theta-\theta_0|$, если

$$|\omega_j\pm\omega_h|=n\theta_0 \qquad (j,h=1,\ldots,m;\ n=0,1,2,\ldots).$$

При $\mu=0$, $\theta=\theta_0$ бесконечная матрица коэффициентов системы (1.3) превращается в диагональную с элементами

$$g_{ks}(p)=(p+ki\theta_0)^2+\omega_s^2 \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ s=1,\ldots,m). \tag{1.5}$$

При $p=i\omega_j$ в случае резонанса несколько коэффициентов $g_{ks}(i\omega_j)$ обращаются в нуль. Из множества чисел $\pm\omega_s(s=1,\ldots,m)$ выделим те, которые отличаются от $i\omega_j$ на целое кратное θ_0. Обозначим их через $\rho_1,\ldots,\rho_\sigma$ $(\sigma\leqslant 2m)$. Полагаем

$$r_s=\theta_0^{-1}(\rho_s-\rho_1), \quad \rho_1=\omega_j \quad (s=1,\ldots,\sigma).$$

Неизвестные y_{ks}, коэффициенты при которых $g_{ks}(i\omega_j)$ обращаются в нуль, назовем особыми. Переобозначим их через $u_1,\ldots,u_\sigma$ и объединим в вектор U. Остальные неизвестные y_{ks} переобозначим через $z_1, z_2,\ldots$ и объединим в вектор Z. Строки и столбцы бесконечной матрицы системы (1.3), которые содержат элементы $g_{ks}(i\omega_j)=0$, назовем особыми. Система (1.3) примет вид

$$(A_1+\mu A_2)Z+\mu B_1U=0, \quad \mu B_2Z+(C_1+\mu C_2)U=0, \tag{1.6}$$

где A_1, C_1 — диагональные матрицы с элементами $g_{ks}(p)$ (1.5), а элементы матриц A_2, B_1 B_2, C_2 составлены из элементов матриц $M_k(p)$ (1.4). Так как $\operatorname{Det}A_1\neq 0$, то вектор Z можно исключить из системы (1.6), что приведет к конечной системе уравнений относительно $u_1,\ldots,u_\sigma$:

$$[C_1+\mu C_2-\mu^2B_2(A_1+\mu A_2)^{-1}B_1]U=0. \tag{1.7}$$

Уравнение для характеристических показателей p, близких к $i\omega_j$, найдем из условия существования ненулевого решения системы (1.7):

$$\operatorname{Det}[C_1+\mu C_2-\mu^2B_2(A_1+\mu A_2)^{-1}B_1]=0. \tag{1.8}$$

Так как при достаточно малых значениях $|p-i\omega_j|$, $|\mu|$, $|\theta-\theta_0|$ выполняется неравенство $\|\mu A_1^{-1}A_2\|<1$, то элементы определителя будут голоморфны относительно p, μ, θ в точке $p=i\omega_j$, $\mu=0$, $\theta=\theta_0$.

2. В случае простого резонанса, когда $\sigma=2$, в первом приближении уравнение (1.8) для характеристических показателей примет вид

$$\operatorname{Det}[C_1+\mu C_2+0(\mu^2)]=0, \tag{2.1}$$

то есть в первом приближении можно в качестве элементов определителя взять элементы матрицы системы (1.3), находящиеся на пересечении особых строк и столбцов. Пусть соотношение

$$\theta_0 = n^{-1}(\omega_j + \omega_h) \qquad (j,\ h = 1,\ \ldots,\ m;\ n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.2}$$

выполняется лишь при одном наборе индексов $j,\ h,\ n$. Уравнение (2.1) примет вид

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \tag{2.3}$$

где введены обозначения

$$a_{11} = p^2 + \omega_j^2 + \mu[q_{jj}^{(0)}p^2 + \nu_{jj}^{(0)}p + \pi_{jj}^{(0)}] + \ldots$$

$$a_{12} = \mu[q_{jh}^{(n)}(p - n\theta i)^2 + \nu_{jh}^{(n)}(p - n\theta i) + \pi_{jh}^{(n)}] + \ldots$$

$$a_{21} = \mu[q_{hj}^{(-n)}p^2 + \nu_{hj}^{(-n)}p + \pi_{hj}^{(-n)}] + \ldots$$

$$a_{22} = (p - n\theta i)^2 + \omega_h^2 + \mu[q_{hh}^{(0)}(p - n\theta i)^2 + \nu_{hh}^{(0)}(p - n\theta i) + \pi_{hh}^{(0)}] + \ldots$$

Вводя новые комплексные переменные $v,\ \lambda$

$$p = i\omega_j + iv, \quad \theta = \theta_0 + \lambda \tag{2.5}$$

и отбрасывая в (2.4) члены второго порядка малости и выше, из (2.3) получаем квадратное уравнение относительно v. Условие кратности корней этого уравнения определяет границы области неустойчивости в первом приближении:

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \frac{\mu}{2n}\left|\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h} - q_{jj}^{(0)}\omega_j - q_{hh}^{(0)}\omega_h \pm 2\sqrt{g}\right| + O(\mu^2).$$

$$g = \left(\frac{\pi_{hj}^{(-n)}}{\omega_j} + i\nu_{hj}^{(-n)} - q_{hj}^{(-n)}\omega_j\right)\left(\frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\omega_h} - i\nu_{jh}^{(n)} - q_{jh}^{(n)}\omega_h\right). \tag{2.6}$$

При выводе этой формулы учитывалось, что для возвратных систем всегда выполнены условия $\nu_{jj}^{(0)} = 0,\ \ \nu_{hh}^{(0)} = 0,\ \operatorname{Im} g = 0$.

При $g > 0$ к точке $\mu = 0,\ \theta = \theta_0$ примыкает область неустойчивости, при $g < 0$ решения системы (1.1) будут устойчивы при достаточно малых значениях $|\mu|,\ |\theta - \theta_0|$. При $g = 0$ вопрос об устойчивости не решается по первому приближению.

3. В общем резонансном случае уравнение (1.8) с учетом обозначений (2.5) принимает вид

$$\operatorname{Det}|-2\Pi Iv - 2\Pi R\lambda - Ev^2 - 2Rv\lambda - R^2\lambda^2 + \mu\Phi(v,\ \lambda,\ \mu)| = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\Pi,\ R$ — диагональные матрицы соответственно с элементами $|\rho_1|,\ \ldots,\ |\rho_m|;\ r_1,\ \ldots,\ r_m$. На пересечении s-ой строки и s-го столбца диагональной матрицы I находится $+1$, если $\rho_s > 0$ и -1, если $\rho_s < 0$. Матрица $\Phi(v,\ \lambda,\ \mu)$ голоморфна в точке $v = \lambda = \mu = 0$. Уравнение (3.1) преобразуется к виду:

$$\operatorname{Det}|Ev + R\lambda + \mu\Psi(v,\ \lambda,\ \mu)| = 0,$$

$$\Psi(v,\ \lambda,\ \mu) = -(2\Pi I + Ev + R\lambda)^{-1}\Phi(v,\ \lambda,\ \mu). \tag{3.2}$$

Так как $\operatorname{Det}\Pi \neq 0$, то матрица $\Psi(v, \lambda, \mu)$ голоморфна в точке $v=\lambda=\mu=0$. Из теоремы 1 ([13]) следует, что найдется матрица $B(\lambda, \mu)$, голоморфная в точке $v=\lambda=\mu=0$, такая, что уравнение (3.2) приведется к алгебраическому уравнению порядка $\varkappa$:

$$\operatorname{Det}|Ev + R\lambda + \mu B(\lambda, \mu)| = 0.$$

Границы областей неустойчивости находятся из условия равенства нулю дискриминанта $\Delta(\lambda, \mu) = \lambda^{\varkappa(\varkappa-1)} \prod\limits_{1 \le j < s \le \varkappa} (r_j - r_s)^2$.

4. Особенно интересен случай канонической системы

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (C + \mu P(\theta t))y = 0, \qquad P^*(\theta t) = P(\theta t). \tag{4.1}$$

Здесь и далее звездочкой обозначается переход к транспонированной комплексно-сопряженной матрице.

Бесконечная матрица (1.3) при $\operatorname{Re}p=0$ и вещественных μ, θ будет эрмитовой. При этом коэффициенты системы (1.6) удовлетворяют условиям: $A_1^*=A_1$, $A_2^*=A_2$, $B_1^*=B_2$, $C_1^*=C_1$, $C_2^*=C_2$. Следовательно матрица определителя (1.8) будет эрмитовой. В дальнейшем будут рассматриваться матрицы, голоморфно зависящие от параметров v, λ, μ. Такие матрицы будем называть эрмитовыми, если эти матрицы эрмитовы при вещественных значениях параметров v, λ, μ. Умножим матрицу определителя (3.1) слева и справа на диагональную с вещественными элементами матрицу $S=(2\Pi + Ev + R\lambda)^{1/2}$. Приходим к уравнению

$$\operatorname{Det}|Iv + IR\lambda + \mu\Psi(v, \lambda, \mu)| = 0, \tag{4.2}$$

где при вещественном v выполняются условия

$$\Psi^*(v, \lambda, \mu) = \Psi(v, \lambda, \mu), \qquad \Psi(v, \lambda, \mu) = S\Phi(v, \lambda, \mu)S.$$

Из теоремы 3 ([13]) следует существование эрмитовой голоморфной в точке $v=\lambda=\mu=0$, матрицы $H(\lambda, \mu)$ такой, что уравнение (4.2) может быть представлено в виде:

$$\operatorname{Det}|Iv + IR\lambda + \mu H(\lambda, \mu)| = 0, \quad H^*(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu). \tag{4.3}$$

Из представления (4.3) вытекает известная теорема М. Г. Крейна ([]) о резонансных частотах для гамильтоновой системы (4.1). Действительно, если все числа ρ_s одного знака, то $I = \pm E$. Уравнение (4.3) перейдет в уравнение

$$\operatorname{Det}|Iv + IR\lambda \pm \mu H(\lambda, \mu)| = 0,$$

все корни которого всегда вещественны и, поэтому, решения системы (4.1) будут устойчивыми. В частности, частоты вида (2.7) будут нерезонансными. В случае резонансной частоты θ_0 (2.2) уравнение (4.3) примет вид:

$$\begin{vmatrix} \nu + \mu h_{11}(\lambda, \mu) & \mu h_{12}(\lambda, \mu) \\ \mu h_{21}(\lambda, \mu) & -\nu + n\lambda + \mu h_{22}(\lambda, \mu) \end{vmatrix} = 0, \qquad h^*_{12}(\lambda, \mu) = h_{21}(\lambda, \mu).$$

Условие существования кратного корня этого уравнения может быть представлено в виде равенства

$$\operatorname{Det}|E\lambda - \mu A(\lambda, \mu)| = 0, \tag{4.4}$$

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} h_{11}(\lambda, \mu) + h_{22}(\lambda, \mu) & 2h_{12}(\lambda, \mu) \\ 2h_{21}(\lambda, \mu) & h_{11}(\lambda, \mu) + h_{22}(\lambda, \mu) \end{pmatrix}; \quad A^*(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu).$$

Матрица $A(\lambda, \mu)$ является эрмитовой и голоморфной в точке $\lambda = \mu = 0$. В силу теоремы 3 ([13]) найдется эрмитовая голоморфная в точке $\lambda = \mu = 0$ матрица $F(\mu)$, такая, что уравнение (4.4) может быть приведено к форме:

$$\operatorname{Det}|E\lambda - \mu F(\mu)| = \begin{vmatrix} \lambda - \mu f_{11}(\mu) & -\mu f_{12}(\mu) \\ -\mu f_{21}(\mu) & \lambda - \mu f_{22}(\mu) \end{vmatrix} = 0.$$

В силу эрмитовости матрицы $F(\mu)$ выполнены равенства

$$\operatorname{Im} f_{11}(\mu) = 0, \quad f_{11}(\mu) = f_{22}(\mu), \quad f^*_{12}(\mu) = f_{21}(\mu).$$

При вещественном μ для λ получим выражение

$$\lambda = \mu f_{11}(\mu) \pm |\mu f_{12}(\mu)|.$$

Окончательный вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Пусть в системе* (4.1) *имеет место простой резонанс вида* (2.2) *и соотношение* (2.2) *для закрепленного* θ_0 *выполняется при одном наборе* j, h, n. *Тогда границы области неустойчивости, примыкающей к точке* $\mu = 0$, $\theta = \theta_0$ *могут быть представлены в виде*

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_1(\mu) \pm |\mu f_2(\mu)|, \tag{4.5}$$

где $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$ — *голоморфные функции в точке* $\mu = 0$.

Замечание. Если μ считать комплексной переменной, то условие кратности характеристических показателей, близких к $i\omega_j$ при достаточно малых $|\mu|$, примет вид

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_{11}(\mu) \pm \sqrt{\mu^2 f_{12}(\mu) f_{21}(\mu)}, \tag{4.6}$$

где функции $f_{12}(\mu)$, $f_{21}(\mu)$ комплексно-сопряженные при вещественных значениях μ. Пусть имеет место разложение

$$f_{12}(\mu) = a_0 + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \ldots$$

Тогда приходим к выводу, что значения $\Theta_{\pm}(\mu)$, определяющие границы области неустойчивости, могут быть представлены в аналитическом относительно μ виде

$$\Theta_{\pm} = \theta_0 + \mu f_{11}(\mu) \pm \mu \left| \sqrt{a_0 a_0^*} + \mu \frac{a_1 a_0^* + a_0 a_1^*}{2\sqrt{a_0 a_0^*}} \right| + \ldots \tag{4.7}$$

Однако представление границ областей неустойчивости в виде (4.5), (4.6) принципиально лучше, чем представление (4.7), полученное по методу малого параметра ([8]). Функции $\mu f_1(\mu)$, $\mu f_2(\mu)$ будут голоморфными относительно коэффициентов $\mu\pi_{rs}^{(n)}$. При выполнении условия

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \| P_k \| \leqslant \varkappa < \infty$$

можно указать снизу положительную оценку радиуса круга голоморфности для функций $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$ в (4.5). Этого нельзя сделать для разложения вида (4.7). В частности в работе ([8]) доказывается аналитичность функций $\Theta_\pm(\mu)$ (4.7) при условии $a_0 \neq 0$. В представлении вида (4.5) ограничение $a_0 \neq 0$ несущественно.

5. Выведем в общем виде уравнения границ области неустойчивости в случае простого резонанса на частоте θ_0 (2.2) для системы (4.1). Придем к уравнению вида (2.3), где

$$a_{11} = p^2 + \omega_j^2 + \mu\pi_{jj}^{(0)} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{jr}^{(-s)}\pi_{rj}^{(s)}}{(p+s\theta i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{12} = \mu\pi_{jh}^{(n)} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{jr}^{(-s)}\pi_{rh}^{(s+n)}}{(p+s\theta i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{21} = \mu\pi_{hj}^{(-n)} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)}\pi_{rj}^{(s)}}{(p+s\theta i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3),$$

$$a_{22} = (p - n\theta i)^2 + \omega_h^2 + \mu\pi_{hh}^{(0)} - \mu^2 \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)}\pi_{rh}^{(n+s)}}{(p+s\theta i)^2 + \omega_r^2} + O(\mu^3).$$

Штрих у суммы здесь и далее обозначает, что выпускаются два слагаемых, у которых при $p = i\omega_j$, $\theta = \theta_0$ знаменатели обращаются в нуль. Они соответствуют значениям индексов $s=0$, $r=j$; $s=-n$, $r=h$. Во втором приближении учитываются лишь элементы матрицы коэффициентов системы (1.3), расположенные на главной диагонали, а также на особых строках и столбцах. Повторяя выводы предыдущего пункта, придем к общей формуле вида (4.5):

$$\Theta_\pm = \frac{\omega_j + \omega_h}{n} + \frac{\mu}{2n}\left(\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h}\right) - \frac{\mu^2(\omega_j+\omega_h)\pi_{jh}^{(n)}\pi_{hj}^{(-n)}}{8n\omega_j^2\omega_h^2} -$$

$$- \frac{\mu^2}{2n\omega_j} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{jr}^{(-s)}\pi_{rj}^{(s)}}{\omega_r^2 - (\omega_j + s\theta_0)^2} - \frac{\mu^2}{2n\omega_h} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\pi_{hr}^{(-n-s)}\pi_{rh}^{(n+s)}}{\omega_r^2 - (\omega_j + s\theta_0)^2} -$$

$$- \frac{\mu^2}{8n\omega_j}\left(\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j}\right)^2 - \frac{\mu^2}{8n\omega_h}\left(\frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h}\right)^2 + O(\mu^3) \pm |f_2(\mu)|. \tag{5.1}$$

Для $f_2(\mu)$ найдем выражение

$$f_2(\mu)=\frac{\mu}{n}\frac{\pi_{jh}^{(n)}}{\sqrt{\omega_j\omega_h}}-\frac{\mu^2\pi_{jh}^{(n)}}{4n\sqrt{\omega_j\omega_h}}\left(\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{\omega_j^2}+\frac{\pi_{hh}^{(0)}}{\omega_h^2}\right)-$$

$$-\frac{\mu^2}{n\sqrt{\omega_j\omega_h}}\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\pi_{jr}^{(-s)}\pi_{rh}^{(s+n)}}{\omega_r^2-(\omega_j+s\theta_0)^2}+0(\mu^3). \qquad (5.2)$$

Вывод формулы связан с громоздкими выкладками и здесь не приводится. Построение границ области неустойчивости во втором приближении осуществлялось в работах ([9,12]). В общем виде формулы для областей неустойчивости были получены впервые в ([10]), а затем в ([4,8]) другим путем, приводящим к разложениям вида (4.7).

Пример. Найдем область комбинационного резонанса системы

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\omega_1^2y_1+2(\alpha\cos 2\theta t+\beta^2\cos\theta t)y_2=0,\quad \theta_0=\omega_1+\omega_2,$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+(\omega_2^2+2\gamma\sin 3\theta t)y_2+2(\alpha\cos 2\theta t+\beta^2\cos\theta t)y_1=0.$$

Здесь α, β, γ — малые одного порядка малости. Из сравнения с обозначениями (1.2) найдем значения $\mu\pi_{12}^{(\pm1)}=\beta^2$, $\mu\pi_{21}^{(\pm1)}=\beta^2$, $\mu\pi_{12}^{(\pm2)}=\alpha$, $\mu\pi_{21}^{(\pm2)}=\alpha$, $\mu\pi_{22}^{(\pm3)}=\pm\gamma i$. Из формул (5.1), (5.2) найдем границы области комбинационного резонанса при $n=1$ с точностью до малых второго порядка:

$$\theta_{\pm}=\omega_1+\omega_2+\frac{\alpha^2}{4\omega_1\omega_2(\omega_1+2\omega_2)}+\frac{(3\omega_1+5\omega_2)\alpha^2}{3\omega_1(\omega_1+\omega_2)(\omega_1+3\omega_2)(3\omega_1+\omega_2)}-$$

$$-\frac{\gamma^2}{\omega_2(3\omega_1+5\omega_2)(3\omega_1+\omega_2)}\pm\frac{1}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}\left|\beta^2-\frac{\alpha\gamma i}{3(\omega_1+\omega_2)(3\omega_1+\omega_2)}+\dots\right|.$$

В этом случае, когда в коэффициенты системы входит несколько параметров, видна неаналитичность функции $\theta_{\pm}(\alpha,\beta,\gamma)$ в точке $\alpha=\beta=\gamma=0$.

В заключение отметим, что изложенный здесь метод исследования устойчивости, связанный с построением уравнения для характеристических показателей, может быть применен к изучению устойчивости возмущенных возвратных систем.

Киевский ордена Трудового
Красного Знамени институт
инженеров гражданской авиации

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Կ. Գ. ՎԱԼԵՎ, Ի. Ռ. ԿԱՐԳԱՆՅԱՆ

Գծային պարբերական հետադարձ սիստեմների տատանումների կայունության ուսումնասիրությունը

Ուսումնասիրվում է

$$[E+\mu Q(\theta t)]\frac{d^2y}{dt^2}+\mu N(\theta t)\frac{dy}{dt}+[C+\mu P(\theta t)]y=0$$

տիպի պարբերական գործակիցներով հետադարձ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի տատանումների կայունությունը, այսինքն այնպիսի սիստեմի, որի բնութագրող ցուցիչները սիմետրիկ են դասավորված կեղծ առանցքի նկատմամբ։

Վեյերշտրասի ընդհանրացված Vorbereitungzatz *թեորեմի օգնությամբ ստացվել են կայունության տիրույթի եզրերն երկրորդ մոտավորությամբ։ Այդ եզրերը ներկայացվում են μ-ի նկատմամբ ավելի հարմար անալիտիկ տեսքով, քան փոքր պարամետրի մեթոդով մինչ այդ ստացված ներկայացումները։*

Բնութագրող ցուցիչների համար տրվող հավասարումների կառուցման առաջարկվող մեթոդը կիրառելի է նաև գրգռված հետադարձ սիստեմների համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. Хейл*, Колебания в нелинейных системах, Изд. «Мир», М., 1966. [2] *А. М. Ляпунов*, Собрание сочинений, т. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1956. [3] *И. Г. Малкин*, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956. [4] *М. Г. Крейн*, Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. памяти А. А. Андропова, Изд. АН СССР, М., 1955. [5] *М. Г. Крейн* и *В. А. Якубович*, Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Изд. АН УССР, Киев, I, 1963. [6] *Б. Г. Питтель*, Сб. «Методы вычислений», вып. 4, Изд. ЛГУ, Л., 1967. [7] *Н. П. Еругин*, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. АН БССР, Минск, 1963. [8] *В. А. Якубович, В. М. Старжинский*, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложение, Изд. «Наука», М., 1972. [9] *В. А. Якубович*, ПММ, т. 23, вып. 1 (1959). [10] *К. Г. Валеев*, ПММ, т. 25, вып. 2 (1961). [11] *К. Г. Валеев*, ПММ, т. 27, вып. 6 (1963). [12] *В. В. Болотин*, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956. [13] *К. Г. Валеев, И. Р. Карганян*, ДАН Арм. ССР, т. 47, № 5 (1973).