ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LX 1975 1

УДК 51 681.3.06

МАТЕМАТИКА

Г. Н. Петросян

О классе базисов с разрешимой проблемой включения

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 21/VI 1974)

Данная работа посвящена изучению отношений включения и эквивалентности между схемами алгоритмов над памятью (они называются операторными схемами).

Сама схема, составляющие ее операторы и предикаты, процесс выполнения схемы (при некоторой ее интерпретации) определяются традиционным образом При введении отношений между схемами и выделении класса исследуемых схем были использованы понятия, данные в работе ([1]) и полученные в ней результаты.

Рассмотренные нами отношения между схемами близки к отношениям, исследуемым в работах ([2, 3]), отличаясь от них тем, что результатом работы схемы считается состояние не всей памяти, а только некоторого ее участка.

Выделение класса схем осуществляется заданием базиса операторов и предикатов. Нами описаны такие базисы, для которых проблема включения (следовательно, эквивалентности) оказалась разрешимой.

1. Зададимся множеством $R = \{r\}$; его элементы назовем *ячейками*, а само R — *памятью*.

2. Пусть $F = \{f\}$ — множество функциональных символов с приписанной каждому символу арностью. Элементарным оператором назовем конструкцию, имеющую вид: 1) $r_0 := f(r_1, \ldots, r_k)$ или вид 2) $r_0 := r_1$; здесь f — функциональный символ арности k, а $r_0, r_1, \ldots, r_k$ — некоторые ячейки; каждую из ячеек $r_1, \ldots, r_k$ в случае 1) и ячейку r_1 в случае 2) назовем входом элементарного оператора; ячейку r_0 в обоих случаях будем называть его выходом.

Непустую последовательность $y = \langle A_1; \ldots; A_m \rangle$, построенную из элементарных операторов A_i, $i = 1, \ldots, m$, с различными выходами, назовем *оператором* *, через $D(y)$ обозначим объединение входов элементарных операторов $A_1, \ldots, A_m$, а через $R(y)$ — объединение их выходов.

*) В записи оператора y при $m = 1$ скобки могут опускаться.

3. Пусть $\Pi = \{p\}$—множество предикатных символов с приписанной каждому символу арностью. Предикатом назовем конструкцию вида $\pi = p(r_1, \ldots, r_l)$, где l—арность символа p, а $r_1, \ldots, r_l$—некоторые ячейки, называемые входами предиката; совокупность всех входов предиката π обозначим через $D(\pi)$.

4. Введем понятия простого терма и предикатного терма. По определению,

1) всякий элемент $r \in R$ есть терм;

2) если $f \in F$ имеет арность k и $T_1, \ldots, T_k$-термы, то $f(T_1, \ldots T_k)$-терм.

Множество всех терминов обозначим через E.

Предикатным термом назовем выражение вида $p(T_1, \ldots, T_l)$ где p — предикатный символ арности l, а $T_1 \ldots, T_l$ — некоторые термы из E.

Множество всех предикатных термов обозначим через M.

5. Отображение множества R в множество E назовем состоянием памяти; пусть $\Xi = \{\xi\}$ — множество всех состояний памяти.

Каждому оператору $y = < A_1, \ldots, A_m >$ сопоставим отображение $\xi y : \Xi \to \Xi$, определив его следующим образом: если r_{i0} — выход элементарного оператора A_i, $i = 1, \ldots, m$, и $\xi y = \xi'$, то для любого $r \in R$

$$\xi'(r) = \begin{cases} \xi(r), \text{ если } r \bar{\in} \{r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{m0}\}; \\ f(\xi(r_{i1}), \ldots, \xi(r_{ik})), \text{ если } r = r_{i0} \text{ и оператор } A_i \text{ имеет} \\ \qquad\qquad \text{вид } r_{i0} := f(r_{i1}, \ldots, r_{ik}); \\ \xi(r_{i1}), \text{ если } r = r_{i0} \text{ и оператор } A_i \text{ имеет вид } r_{i0} := r_{i1}. \end{cases}$$

Пусть $\pi = p(r_1, \ldots, r_l)$ — некоторый предикат; через $\pi\xi$, где $\xi \in \Xi$, обозначим предикатный терм $p(\xi(r_1), \ldots, \xi(r_l))$.

6. Операторной схемой (просто схемой) назовем конечный ориентированный граф, в котором 1) выделены две вершины: одна, называемая входом схемы,—с пустым множеством входящих в нее дуг и одной исходящей и вторая, называемая выходом схемы,—с пустым множеством исходящих дуг; 2) каждой из остальных вершин графа сопоставлен или оператор, или предикат, в первом случае из вершины исходит одна дуга, во втором—две, причем одна из них некоторым образом отмечена. Операторную схему будем обозначать символом $\mathfrak{M}$.

7. Отображение $\mu : M \to \{0, 1\}$ назовем функцией разметки. Операторную схему $\mathfrak{M}$, рассматриваемую при заданном μ, будем называть интерпретированной (и. схемой) и обозначать через $\mu\mathfrak{M}$.

8. Определим процесс выполнения и. схемы $\mu\mathfrak{M}$ на состоянии памяти $\xi \in \Xi$. На первом шаге этого процесса рассматриваются само состояние памяти ξ и та дуга схемы, что ведет из ее входа, на некотором шаге процесса — какое-то состояние памяти ξ' и какая-то дуга χ'. Возможны случаи: χ' ведет в выход схемы, χ' ведет в вершину с предикатом π, χ' ведет в вершину с оператором y. В первом случае процесс выполнения и. схемы $\mu\mathfrak{M}$ на состоянии ξ считаем за-

конечным, и. схему $\mu\mathfrak{M}$ — применимой к ξ, а состояние памяти ξ' (оно обозначается через $\mu\mathfrak{M}(\xi)$) — результатом применения $\mu\mathfrak{M}$ к ξ. Во втором и третьем случаях процесс выполнения и. схемы $\mu\mathfrak{M}$ продолжается, т. е. определяются состояние памяти ξ'' и дуга γ'', рассматриваемые на следующем шаге процесса. Если γ' привела в вершину с предикатом π, то в качестве ξ'' берется состояние памяти ξ', а в качестве дуги γ'' — отмеченная дуга, выходящая из этой предикатной вершины, если только $\mu\pi\xi=1$, и неотмеченная — при $\mu\pi\xi=0$. Пусть дуга γ' привела в вершину с оператором y; тогда ξ'' берется равным $\xi'y$, а в качестве дуги γ'' — единственная дуга, выходящая из этой операторной вершины.

Таким образом, и. схема $\mu\mathfrak{M}$ осуществляет частичное отображение $\mu\mathfrak{M}(\xi)$: $\Xi\to\Xi$.

9. Состояние памяти ξ_0, при котором каждой ячейке $r\in R$ сопоставлен символ этой ячейки, будем называть **начальным**.

Обозначим через L множество всех функций разметки.

Схему $\mathfrak{M}$ назовем **пустой**, если при всех $\mu\in L$ на начальном состоянии ξ_0 отображение $\mu\mathfrak{M}(\xi_0)$ не определено.

Пусть R'-произвольная подпамять памяти R; равенство состояний ξ и ξ' на всех ячейках из R' будем записывать $\xi\overset{R'}{=}\xi'$.

Будем говорить, что схема $\mathfrak{M}_1$ R'-**включает в себя схему** $\mathfrak{M}_2$ (запишем это в виде $\mathfrak{M}_1\supseteq\mathfrak{M}_2[R']$), если при всех $\mu\in L$, для которых отображение $\mu\mathfrak{M}_2(\xi_0)$ определено, выполняется равенство

$$\mu\mathfrak{M}_1(\xi_0)\overset{R'}{=}\mu\mathfrak{M}_2(\xi_0).$$

Схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ назовем R'-**эквивалентными**, если одновременно $\mathfrak{M}_1\supseteq\mathfrak{M}_2[R']$ и $\mathfrak{M}_2\supseteq\mathfrak{M}_1[R']$.

10. Зададимся конечным множеством Y операторов и конечным множеством P предикатов; выбранную пару множеств будем называть базисом и записывать в виде (Y, P). Нами рассматриваются только такие схемы, все операторы и предикаты которых принадлежат базису (Y, P); проблемы пустоты, включения и эквивалентности, рассмотренные для класса таких схем, называются проблемами в базисе (Y, P).

11. Обозначим через Y^* множество всех конечных слов в алфавите Y, а через Y^∞—множество всех бесконечных слов в алфавите Y.

Каждому слову $h=y_1\dots y_m$ из Y^* сопоставим состояние памяти $\xi_0 h$, определив его следующим образом

$$\xi_0 h=(\dots((\xi_0 y_1)y_2)\dots)y_m.$$

12. Пусть $h\in Y^*\cup Y^\infty$ и $R_0\subseteq R$; проекцией слова h на подпамять R_0 назовем слово, полученное из h удалением всех таких букв, для которых $R_0\cap R(y)=\varnothing$; проекцию слова h на R_0 обозначим через $np_{R_0}h$.

13. Слову $h\in Y^*\cup Y^\infty$ и подпамяти $R_0\subseteq R$ сопоставим последовательность, называемую **историей подпамяти** R_0 **в слове** h.

Пусть h имеет вид

$$y_1 y_2 \ldots y_m \ldots;$$

по слову h построим последовательность состояний памяти

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \ldots;$$

определив ее элементы равенством $\xi_i = \xi_{i-1} y_i$, $i = 1, 2, \ldots$; найдем $пр_{R_0} h$, пусть она имеет вид

$$y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_l}, \ldots;$$

она определяет подпоследовательность состояний

$$\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_l}, \ldots;$$

если ограничение состояния ξ (рассматриваемого как отображение) на подпамять R_0 обозначим через $\xi(R_0)$, то последовательность

$$\xi_{i_1}(R_0), \xi_{i_2}(R_0), \ldots, \xi_{i_l}(R_0), \ldots$$

и будем называть историей подпамяти R_0 в слове h.

14. Базис (Y, P) назовем **невырожденным относительно подпамяти** $R_0 \subseteq R$, если

а) для любых $h, h' \in Y^*$ из равенства

$$\xi_0 h(R_0) = \xi_0 h'(R_0)$$

следует совпадение историй ячейки r в словах h и h', какой бы ни была $r \in R_0$;

б) для всякого предиката $\pi \in P$

$$D(\pi) \subseteq R_0 \text{ и } \forall_{\pi \in P}\ \xi \overset{R_0}{=} \xi' \to \xi\pi \neq \xi'\pi';\ \xi, \xi' \in \Xi(Y)^*$$

15. Нами доказана

Теорема. *Если базис (Y, P) — не вырожденный относительно подпамяти R_0, то в базисе (Y, P) для любого $R' \supseteq R_0$ разрешима проблема R'-включения схем.*

Идея доказательства теоремы заключается в следующем: пусть $L(\mathfrak{M})$ множество всех μ из L, для которых $\mu\mathfrak{M}(\xi_0)$ определено. Для заданных схем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ определяется натуральное число $\tau = \tau(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ и по полученному τ для схемы $\mathfrak{M}_1$ эффективно строится конечное подмножество $L\tau(\mathfrak{M}_1) \subseteq L(\mathfrak{M}_1)$. Затем доказывается, что

$$\forall_{\mu \in L(\mathfrak{M}_1)} [\mu\mathfrak{M}_1(\xi_0) = \mu\mathfrak{M}_2(\xi_0)] \Leftrightarrow \forall_{\mu \in L\tau(\mathfrak{M}_1)} [\mu\mathfrak{M}_1(\xi_0) = \mu\mathfrak{M}_2(\xi_0)].$$

Отсюда следует разрешимость проблемы R' — эквивалентности и проблемы пустоты.

16. Отметим существенность каждого из двух требований, входящих в определение невырожденности базиса.

Рассмотрим, например, базис (Y^1, P^1) над памятью $R = \{r, s\}$:

* $\Xi(Y) = \{\xi_0 h / h \in Y^*\}$

$$y_1 \equiv \langle r := f_1(r, s);\ s := f_2(r, s) \rangle,$$
$$y_2 \equiv r := f(r), \qquad y_3 \equiv s := f(s),$$
$$\pi_1 \equiv p(r) \qquad \pi_2 \equiv p(s).$$

Легко проверить, что при $R_0 = R$ требование а) удовлетворяется, а б) нет. Можно показать, что в этом базисе проблема пустоты неразрешима. Доказательство этого факта использует доказательство неразрешимости проблемы пустоты для базиса (Y^2, P^2) над памятью $R = \{r, s\}$:

$$y_1 \equiv r := f(r), \qquad y_2 \equiv s := f(s), \qquad y_3 \equiv r := f(s);$$
$$\pi_1 \equiv p(r), \qquad \pi_2 \equiv p(s);$$

последнее доказательство содержится в работе [4].

С другой стороны, базис (Y^3, P^3) над памятью $R = \{r, s\}$:

$$y_1 \equiv r := H,\ y_2 \equiv s := H,\ y_3 \equiv s := f(s),\ y_4 \equiv r := f(r),$$
$$\pi_1 \equiv p_1(r, s),\ \pi_2 \equiv P_2(r, s),\ \pi_3 \equiv P_3(r, s)$$

при $R_0 = R$ удовлетворяет требованию б) и не удовлетворяет требованию а). В работе [5] устанавливается неразрешимость проблемы пустоты в этом базисе.

17. Остановимся на связи полученного нами результата с результатом, установленным в [6], где введено отношение логико-термальной эквивалентности между схемами и доказана разрешимость проблемы этой эквивалентности.

Пусть (Y, P) — произвольный базис над памятью R; расширив память R прибавлением к ней еще одной ячейки r_0, можно построить новый базис $(\overline{Y}, \overline{P})$, который будет невырожденным относительно ячейки r_0. Для всякой схемы $\mathfrak{M}$ в базисе (Y, P) можно построить соответствующую ей схему $\overline{\mathfrak{M}}$ в базисе $(\overline{Y}, \overline{P})$. Оба построения можно осуществить таким образом, что схемы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ в базисе (Y, P) логико-термально эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им схемы $\overline{\mathfrak{M}}_1$ и $\overline{\mathfrak{M}}_2$ в базисе $(\overline{Y}, \overline{P})$ r_0—эквивалентны. Таким образом разрешимость проблемы логико-термальной эквивалентности можно извлечь из установленного нами результата.

Автор приносит глубокую благодарность Р. И. Подловченко за постановку задачи и помощь при оформлении статьи.

Ереванский государственный университет

Գ. Ն. ՓԵՏՐՈՍՅԱՆ

Բազիսների մի դասի մասին, որտեղ լուծելի է պատկանելիության պրոբլեմը

Ներկա հոդվածը վերաբերում է տեսական ծրագրավորման հիմնական բաժիններից մեկին՝ հաշվեկանոնների սխեմաների (կրճատ՝ սխեմաների) *համարժեքության։ Սխեմաները կոնստրուկտիվ օբյեկտներ են, կառուցված օպերատորների և պրեդիկատների միջոցով, որոնց մեկնարկումը սխեմաներին վեր է ածում հաշվեկանոնների։ Ըստ սահմանման, $\mathfrak{M}$ սխեման պատկանում է $\mathfrak{M}'$ սխեմային, եթե կամայական մեկնարկի ժամանակ $\mathfrak{M}$ սխեմայով բնորոշվող հաշվեկանոնը պատկանում է $\mathfrak{M}'$ սխեմայով բնորոշվող հաշվեկանոնին։ Հոդվածում սահմանվում է R_0 -չվերածվող օպերատորների և պրեդիկատների (R_0-չվերածվող բազիս) դասի հասկացողությունը և ապացուցվում, որ այդպիսի բազիսներում R_0-պատկանելիության պրոբլեմն ալգորիթմորեն լուծելի է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. И. Подловченко,* Сб. «Системное и теоретическое программирование, I» Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума, Кишинев, 283—292, 1974. [2] *А. А. Летичевский,* «Кибернетика», № 2, Киев, 1969. [3] *А. А. Летичевский,* «Кибернетика», № 2, Киев, 1970. [4] *D. C. Luckham, D. M. R. Park* and *M. S. Paterson,* ICSS, vol. 4, No 3, (1970). [5] *Г. Н. Петросян* "Кибернетика", №5, Киев, 1974. [6] *В. Э. Иткин,* „Кибернетика", № 1, Киев, 1972.