

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О кратной полноте собственных элементов для одного
класса краевых задач, мероморфно зависящих от параметра

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/V 1974)

В данной работе устанавливается теорема об n -кратной полноте системы собственных элементов для следующей краевой задачи на собственные значения, мероморфно зависящей от параметра λ :

$$Lu + \lambda Mu + \lambda^2 Nu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\lambda^2}{\lambda - a_k} L_k u = 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial n^{n-1}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $L, M, N, L_k (k=1, 2, \dots, n-2)$ — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка 2 , $\partial\Omega$ — граница m -мерного эллипсоида Ω , в котором рассматривается краевая задача (1), (2), $a_k (k=1, 2, \dots, n-2)$ — действительные числа, λ — комплексный параметр.

Краевая задача (1), (2) в случае $n=2$ рассмотрена нами в работе (1).

Пусть $R(\Omega)$ означает множество всех полиномов от переменных $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющих граничным условиям (2). Относительно дифференциальных операторов L, M, N, L_k предполагается

$$(I) \quad (-1)^n \int_{\Omega} p \cdot L p d\Omega > 0, \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

$$(II) \quad (-1)^n \int_{\Omega} p \cdot N p d\Omega < 0, \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

$$(III) \quad \frac{(-1)^n}{a_k} \int_{\Omega} p \cdot L_k p d\Omega > 0 \quad 0 \neq p \in R(\Omega).$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы о кратной полноте.

Теорема. При выполнении условий (I)–(III) $\exists$ система полиномиальных собственных функций краевой задачи (1), (2), которая n -кратно полна в пространстве $\dot{W}_2^{(n)}(\Omega)$.

Доказательству этой теоремы предположим некоторые вспомогательные построения и леммы.

Обозначим через $R(\Omega)$ пространство всех полиномов от переменных $x_1, \dots, x_m$. Нетрудно заметить, как это следует из условия (I), что отображение $L: R(\Omega) \rightarrow R(\Omega)$ является изоморфизмом и поэтому существует обратный оператор L^{-1} , отображающий $R(\Omega)$ на $\dot{R}(\Omega)$. Применяя с обеих сторон уравнения (1) оператор L^{-1} , обратный к оператору L , перепишем краевую задачу (1), (2) в виде операторного пучка в пространстве $R(\Omega)$

$$Eu - iAu - i^2Bu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{i^2}{i - a_k} C_k u = 0, \quad (3)$$

$$u \in \dot{R}(\Omega), \quad (4)$$

где $A = -L^{-1}M$, $B = -L^{-1}N$, $C_k = L^{-1}L_k$, ($k = 1, 2, \dots, n-2$).

Через $\dot{R}_s(\Omega)$ обозначим пространство полиномов из $\dot{R}(\Omega)$, степень которых не превышает n .

Тогда $R(\Omega) = \bigcup_{s=0}^{\infty} \dot{R}_s(\Omega)$. Скалярное произведение в $\dot{R}_s(\Omega)$ зададим формулой

$$(p, q) = (-1)^s \int_{\Omega} Lp \cdot q \, d\Omega, \quad (*)$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Операторы A, B, C_k ($k = 1, 2, \dots, n-2$) для любого числа $s \geq 2$ отображают пространство $\dot{R}_s(\Omega)$ в себя и являются симметрическими относительно скалярного произведения (*), причем операторы $B, 1/a_k C_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-2$) положительно определены.

Рассмотрим гильбертову сумму n экземпляров пространств $\dot{R}_s(\Omega)$

$$H_s(\Omega) = \dot{R}_s(\Omega) \oplus \dots \oplus \dot{R}_s(\Omega).$$

Скалярное произведение элементов $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$ и $\hat{q} = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$ из $H_s(\Omega)$ имеет вид

$$|\hat{p}, \hat{q}| = (p, q) + (p', q') + \sum_{k=1}^{n-2} (p_k, q_k). \quad (*, *)$$

В конечномерном пространстве $H_s(\Omega)$ рассмотрим оператор Π , заданный с помощью операторной матрицы, возникающей при линеаризации пучка (3) (*).

$$\Pi = \begin{pmatrix} A & B & \frac{1}{a_1} C_1 & \dots & \frac{1}{a_l} C_l & \dots & \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} \\ E & O & O & \dots & O & \dots & O \\ E & O & \frac{1}{a_1} E & \dots & O & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E & O & O & \dots & \frac{1}{a_l} E & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E & O & O & \dots & O & \dots & \frac{1}{a_{n-2}} E \end{pmatrix}$$

В силу леммы 1 оператор U отображает пространство $\hat{H}_1(2)$ в себя.

Лемма 2. Если $p = (p, p', p_1, \dots, p_{n-1}) \in H_s(2)$ собственный вектор оператора Π , соответствующий собственному значению λ , то первая компонента $p \in R_s(2)$ является собственным элементом пучка (3) с собственным значением $\mu = 1/\lambda$, и наоборот, если $p \in R_s(2)$ есть собственный элемент пучка (3) с собственным значением μ , то вектор

$p = (p, \frac{1}{i} p, \frac{a_1}{ia_1-1} p, \dots, \frac{a_{n-2}}{ia_{n-2}-1} p) \in \overset{\circ}{H}_s(\Omega)$ будет собственным вектором оператора Π , соответствующим собственному значению $\mu = 1/p$.

Доказательство. Пусть $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2}) \neq 0$ и $\Pi p = j p$.

$$\begin{aligned} Ap + Bp' + \frac{1}{a_1} C_1 p_1 + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2} &= {}^1 p, \\ p &= {}^1 p', \\ p + \frac{1}{a_1} p_1 &= {}^1 p_1, \\ \dots & \\ p + \frac{1}{a_{n-2}} p_{n-2} &= {}^1 p_{n-2} \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$Ap + \frac{1}{i} Bp + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{i \cdot i_k - 1} C_k p = r p.$$

или, что то же самое

$$Ep - \mu Ap - \mu^2 Bp + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\mu^2}{\mu - a_k} C_k p = 0, \quad p \neq 0, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

Обратно, пусть $p=0 \in \mathcal{R}_s(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (3). Тогда непосредственно проверяется, что вектор

$$\hat{p} = (p, \frac{1}{\lambda} p, \frac{a_1}{\lambda a_1 - 1} p, \dots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2} - 1} p)$$

является собственным для оператора Π в $\hat{H}_s(\Omega)$ с собственным значением $\mu = 1/\lambda$. Лемма доказана.

В пространстве $\hat{H}_s(\Omega)$ рассмотрим оператор G , заданный с помощью операторной матрицы

$$G = \begin{pmatrix} E & O & O & \dots & O \\ O & B & O & \dots & O \\ O & O & \frac{1}{a_1} C_1 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} \end{pmatrix}$$

Лемма 3. Оператор-матрица G есть симметрический, положительно определенный оператор относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$.

Доказательство. В самом деле, в силу леммы 1 для произвольных двух векторов $\hat{p} = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$ и $\hat{q} = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$ из пространства $\hat{H}_s(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} |G\hat{p}, \hat{q}| &= (p, q) + (Bp', q') + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, q_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q_{n-2} \right) = \\ &= (p, q) + (p', Bq') + \left(p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1 \right) + \dots + \left(p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2} \right) = \\ &= |\hat{p}, G\hat{q}|. \end{aligned}$$

Положительная определенность оператора G в $\hat{H}_s(\Omega)$ следует из положительной определенности операторов $B, 1/a_k C_k$ ($k=1, 2, \dots, n-2$) в $\hat{R}_s(\Omega)$. В самом деле,

$$|G\hat{p}, \hat{p}| = (p, p) + (Bp', p') + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, p_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, p_{n-2} \right) \geq 0$$

для любого вектора $\hat{p} \in \hat{H}_s(\Omega)$, а из $|G\hat{p}, \hat{p}| = 0$ следует $p = p' = p_1 = \dots = p_{n-2} = 0$, т. е. $\hat{p} = 0$. Лемма доказана.

В пространстве $\hat{H}_s(\Omega)$, наряду со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, рассмотрим новое скалярное произведение

$$\langle \hat{p}, \hat{q} \rangle = |G\hat{p}, \hat{q}|, \quad \hat{p}, \hat{q} \in \hat{H}_s(\Omega). \quad (*, *)$$

Лемма 4. Оператор-матрица Π является симметрическим в пространстве $\hat{H}_s(\Omega)$ ($s \geq 2$) относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Доказательство. Действительно, для любых двух векторов $p = (p, p', p_1, \dots, p_{n-2})$ и $q = (q, q', q_1, \dots, q_{n-2})$ из пространства $H_2(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \Pi p, q \rangle &= [G \Pi p, q] = [\Pi p, G q] = (Ap + Bp' + \frac{1}{a_1} C_1 p_1 + \dots + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q) + (p, Bq') + (p + \frac{1}{a_1} p_1, \frac{1}{a_1} C_1 q_1) + \dots + (p + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} p_{n-2}, \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) = (p, Aq + Bq' + \frac{1}{a_1} C_1 q + \dots + \\ &+ \frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} q_{n-2}) + (Bp', q) + \left(\frac{1}{a_1} C_1 p_1, q + \frac{1}{a_1} q_1 \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{a_{n-2}} C_{n-2} p_{n-2}, q + \frac{1}{a_{n-2}} q_{n-2} \right) = [Gp, \Pi q] = \langle p, \Pi q \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали леммы 1 и 3.

Аналогично определению n -кратной полноты, данному М. В. Келдышем ⁽⁴⁾ для полиномиальных пучков, вводим следующее.

Определение. Мы скажем, совокупность собственных функций $\{\varphi\}$ с собственными значениями $\{\lambda\}$ пучка (3) образует n -кратно полную систему в пространстве $W_2^{(n)}(\Omega)$, если система вектор-функций

$$\left\{ \hat{\varphi} = \left(\varphi, \frac{1}{\lambda} \varphi, \frac{a_1}{\lambda a_1 - 1} \varphi, \dots, \frac{a_{n-2}}{\lambda a_{n-2} - 1} \varphi \right) \right\}$$

полна в гильбертовой сумме n экземпляров пространств $W_2^{(1)}(\Omega) \oplus \dots \oplus W_2^{(1)}(\Omega)$.

Доказательство теоремы. Из леммы 4 следует, что оператор Π в пространстве $H_2(\Omega)$ для любого $s \geq 2$ имеет полную систему собственных векторов. Следовательно, объединение всех этих систем собственных векторов будет полной в $\hat{H}(\Omega) = \bigcup_{s=2}^{\infty} \hat{H}_s(\Omega)$. Замыкание $\hat{H}(\Omega)$ в метрике этого пространства совпадает с $H(\Omega) =$

$= \hat{W}_2^{(1)}(\Omega) \oplus \dots \oplus \hat{W}_2^{(1)}(\Omega)$, поскольку, как это показано в ⁽⁵⁾, замыкание $\hat{R}(\Omega)$ совпадает с $\hat{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Поэтому у оператора Π имеется полная система собственных векторов в $H(\Omega) = \hat{W}_2^{(1)}(\Omega) \oplus \dots \oplus \hat{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

А это в силу леммы 3 означает, что первые компоненты собственных векторов оператора Π образуют n -кратно полную систему полиномиальных собственных элементов операторного пучка (3) и следовательно краевой задачи (1), (2) в гильбертовом пространстве $\hat{W}_2^{(n)}(\Omega)$. Теорема доказана.

Պարամետրից մերոմորֆ կախված եզրային խնդրի սեփական
էյենվեկտների բազմապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում սեփական արժեքների վերաբերյալ եզրային խնդիրների հե-
տևյալ դասի համար

$$Lu + iMu + i^2 Nu + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{i^2}{i - a_k} L_k u = 0, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\sigma_2} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sigma_2} = \dots = \frac{\partial u}{\partial n^{n-1}} \Big|_{\sigma_2} = 0, \quad (2)$$

որտեղ L, M, N, L_k ($k=1, 2, \dots, n-2$) հաստատուն գործակիցներով 2-
կարգի դիֆերենցիալ սպերատորներ են, ապացուցված է սեփական ֆունկցի-
աների n -ապատիկ լրիվության վերաբերյալ թեորեմ:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАННОЕ

- ¹ Г. В. Вирабян, ДАН Арм. ССР, т. XLIII, №1 (1966). ² P. H. Møller Mathema-
tische Zeitschrift, 70 Band 5, 1959. ³ Г. В. Вирабян, ДАН Арм. ССР, т. XLVIII, №2
(1969). ⁴ М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, Труды межд. симп. по прим. т. ф. к. п. в ме-
ханике сплошной среды, Изд. „Наука“, 1965.