ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LX 1975 1

УДК 5175

МАТЕМАТИКА

И. П. Федчина

Описание решений касательной проблемы Неванлинны—Пика

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Александряном 18/X 1974)

В этой заметке продолжается изучение задачи, рассмотренной в ([1]).

Пусть H_1 и H_2 фиксированные гильбертовы пространства, причем $n_1 = \dim H_1 \leq n_2 = \dim H_2 < \infty$.

Обозначим через $[H_j, H_k]$ пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из H_j в H_k ($j, k = 1, 2$).

Через $W_{jk}(D)$ обозначим класс оператор-функций $W(z)$ со значениями в $B(H_j, H_k)$*, голоморфных в единичном диске: $D\{z: |z|<1\}$.
Ставится следующая задача:
(A) („касательная" проблема Неванлинны—Пика).

Дана последовательность точек

$$z_l, \quad l \in N^{**}$$

и две последовательности векторов

$$a_l \, (\in H_1)^{***} \quad l \in N$$

и

$$c_l \, (\in H_2), \qquad l \in N.$$

Требуется: а) найти критерий существования такой оператор-функции $w(z) \in W_{12}(D)$, что

$$w(z_l) a_l = c_l, \quad l \in N$$

б) найти критерий единственности решения.

---

* $B(H_j, H_k)$ — множество всех сжимающих (то есть с нормой ≤ 1) операторов из $[H_j, H_k]$.

** N — либо отрезок натурального ряда: $N = \{1, 2, \ldots, m\}$ либо весь натуральный ряд: $N = \{1, 2, \ldots\}$.

*** Если в последовательности точек z_l ($l \in N$) есть группа совпадающих точек, то будем предполагать, что ей отвечает множество линейно независимых векторов a_k.

в) в случае, когда решение не единственно, дать полное описание всех решений.

Критерий разрешимости поставленной задачи, как это показано в заметке [1], состоит в выполнении условия:

$$A(\alpha, \alpha)=\sum_{j,k=1}^{m} \frac{a_j^* a_k - c_j^* c_k}{1-\bar{z}_j z_k} \bar{\alpha}_j \alpha_k \geqslant 0$$

для произвольных чисел α_k, $k \in N$.

Для получения описания всех решений задачи (A) при $N=\{1, 2, \ldots, m\}$ рассмотрим два случая:

1) $\operatorname{rang} A(\alpha, \alpha)=m$

2) $\operatorname{rang} A(\alpha, \alpha)=r<m$.

1. *Случай невырождения формы*. Разобъем последовательность точек z_l, $l \in N$ на p $(1 \leqslant p \leqslant m)$ групп совпадающих точек:

$$z_1=z_2=\ldots=z_{\nu_1},\ z_{\nu_1+1}=\ldots=z_{\nu_1+\nu_2},\ \ldots,\ z_{\nu_1+\ldots+\nu_{p-1}+1}=\ldots=z_{\nu_1+\ldots+\nu_p}$$

так, что точки

$$z^{(1)}=z_1,\quad z^{(2)}=z_{\nu_1+1},\ \ldots,\ z^{(p)}=z_{\nu_1+\ldots+\nu_{p-1}+1}$$

различны.

Каждой группе совпадающих точек отвечает множество линейно независимых векторов a_k, которое будем обозначать $\{a_{kj}\}_{k=1}^{\nu_j}$, $j=1, 2, \ldots, p$. Условия, которым должно удовлетворять решение задачи (A), перепишутся в виде:

$$w(z^{(j)})a_{kj}=c_{kj},\ j=1, \ldots, p,\quad k=1, 2, \ldots, \nu_j,$$

$$1 \leqslant p \leqslant m,\quad 1 \leqslant \nu_j \leqslant m,\quad \sum_{j=1}^{p} \nu_j = m.$$

Для описания всех решений задачи (A) при $N=\{1, 2, \ldots, m\}$ узловым пунктом является описание решений при $N=\{1\}$. Как было показано в работе [3], множество решений задачи (A), удовлетворяющих условию: $w(z^{(1)})a_{11}=c_{11}$, $c_{11}^* c_{11}<a_{11}^* a_{11}$, записывается в виде дробно-линейного преобразования

$$w(z)=[\varepsilon_1(z)R_{12}(z)+R_{22}(z)]^{-1}[\varepsilon_1(z)R_{11}(z)+R_{21}(z)], \tag{1}$$

где $\varepsilon_1(z)$ — произвольная оператор-функция из $W_{12}(D)$, а матрица дробно-линейного преобразования (1) имеет вид

$$R_1(z)=\begin{pmatrix} R_{11}^1(z) & R_{12}^1(z) \\ R_{21}^1(z) & R_{22}^1(z) \end{pmatrix}=I+\left(\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}-1\right)P,$$

где

$$P=\frac{1}{a_{11}^* a_{11}-c_{11}^* c_{11}} \begin{pmatrix} a_{11}a_{11}^* & a_{11}c_{11}^* \\ -c_{11}a_{11}^* & -c_{11}c_{11}^* \end{pmatrix}$$

Пусть

$$J=\begin{pmatrix} I_{H_1} & 0 \\ 0 & -I_{H_2}\end{pmatrix}$$

Легко показать, что оператор P является J-ортогональным проектором, проектирующим пространство $H=H_1\oplus H_2$ на (положительное) подпространство, натянутое на вектор $\begin{pmatrix} a_{11} \\ -c_{11}\end{pmatrix}$. При этом матрица $R_1(z)$ является J-сжимающей на D, то есть

$$R_1^*(z)JR_1(z)\leqslant J, \quad z\in D$$

и J-унитарной на окружности C, то есть

$$R_1^*(z)JR_1(z)=J, \quad |z|=1.$$

Следуя В. П. Потапову ([2]) (см. также Ю. П. Гинзбург ([3])), назовем матрицу $R_1(z)$ элементарным множителем. Формулу (1) символически будем записывать в виде:

$$w(z)=[\varepsilon_1(z)]\,R_1(z).$$

Применяя рекуррентный метод Шура—Неванлинны получим, что справедлива

Теорема 1. *Пусть*

$$R(z)=\overset{\frown}{\prod_{l=1}^{p}}\left[I+\left(\frac{z-z^{(l)}}{1-\bar z^{(l)}z}\,\frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}}-1\right)P_l\right]=\begin{pmatrix}R_{11}(z) & R_{12}(z)\\ R_{21}(z) & R_{22}(z)\end{pmatrix}^*,$$

где P_l—J—ортогональный проектор на (положительное) подпространство

$$L_l=\text{л.о.}\left\{\begin{pmatrix}a_{ij}^l\\ -c_{ij}^{(l)}\end{pmatrix}=R_{l-1}(z^{(l)})\dots R_1(z^{(l)})R_0(z^{(l)})\begin{pmatrix}a_{lj}\\ -c_{lj}\end{pmatrix}\right\}_{j=1}^{\nu_l}, \qquad (2)$$

$$R_0(z^{(l)})=I, \quad l=1,2,\dots,p, \quad 1\leqslant p\leqslant m, \quad 1\leqslant \nu_l\leqslant m, \sum_{l=1}^{p}\nu_l=m.$$

Тогда формулой

$$w(z)=[\varepsilon_m(z)R_{12}(z)+R_{22}(z)]^{-1}[\varepsilon_m(z)R_{11}(z)+R_{21}(z)],$$

где $\varepsilon_m(z)$—произвольная оператор-функция класса $W_{12}(D)$, дается описание всех решений задачи (А) для $N=\{1,2,\dots,m\}$.

Переходя к рассмотрению „касательной" проблемы Неванлинны—Пика в случае, когда N—натуральный ряд, придем к рассмотрению бесконечного произведения Бляшке—Потапова

$$\Pi(z)=\overset{\frown}{\prod_{l=1}^{\infty}}\left[I+\left(\frac{z-z^{(l)}}{1-\bar z^{(l)}z}\,\frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}}-1\right)P_l\right], \qquad (3)$$

где P_l—J—ортогональный проектор на подпространство L_l, определяемое по формуле (2).

Определение. Будем называть „касательную" проблему Неванлинны—Пика вполне неопределенной, если сходится бесконечное

* $R(z)$ является конечным J—произведением Бляшке—Потапова (см. ([2])).

произведение Бляшке—Потапова (3).

Исходя из теоремы 1, нетрудно показать, что во вполне неопределенном случае общее решение задачи (A), запишется в виде

$$w(z)=[\varepsilon(z)]\Pi(z) \tag{4}$$

где $\Pi(z)$ определяется по формуле (3), а $\varepsilon(z)$ произвольная оператор-функция из класса $w_{12}(D)$.

Рассмотрим теперь сходящееся произведение Бляшке—Потапова

$$\Pi(z)=\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{\infty}}\left[I+\left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\frac{|z_j|}{z_j}-1\right)P_j\right], \tag{5}$$

$$z_j\neq z_k, \quad \text{при} \quad j\neq k,$$

где P_j—произвольные положительные J—ортогональные проекторы. Выбрав в подпространстве $L_j=PH(H=H_1\oplus H_2)$ произвольный базис

$$\begin{pmatrix} a_{ij}^{(j)} \\ -c_{ij}^{(j)} \end{pmatrix}_{i=1}^{\nu_j}, \quad 1\leqslant\nu_j<\infty, \text{ и построив векторы}$$

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \\ -c_{ij} \end{pmatrix} R_0^{-1}(z_j)\,R_1^{-1}(z_j)\ldots R_{j-1}^{-1}(z_j)\begin{pmatrix} a_{ij}^{(j)} \\ -c_{ij}^{(j)} \end{pmatrix},$$

где $\qquad R_0^{-1}(z_j)=I, \quad l\in N, \ j=1,\ldots,\nu_j, \quad 1\leqslant\nu_j<\infty.$

сформулируем „касательную" проблему Неванлинны—Пика: найти оператор-функцию $w(z)$ из класса $W_{12}(D)$, удовлетворяющую условиям:

$$w(z_j)a_{ij}=c_{ij}, \quad j=1,2,\ldots,\nu_j, \quad l\in N, \quad 1\leqslant\nu_j<\infty.$$

Таким образом показано, что изучение множества решений „касательной" проблемы Неванлинны—Пика во вполне неопределенном случае эквивалентно изучению произведения Бляшке—Потапова (5)*.

С другой стороны, пусть $w(z)$ решение задачи (А), определяемое по формуле (4); тогда

$$F(\zeta)=w(\zeta)B(\zeta), \quad |\zeta|=1,$$

где $B(\zeta)$ построенное специальным образом сходящееся произведение Бляшке—Потапова ($\|B(z)\|\leqslant 1$ при $|z|<1$), является решением следующей задачи, изученной В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном (см.[6]):

(B). Пусть заданы последовательность $\{\gamma_k\}_1^\infty$ операторов из $[H_1,H_2]$ и число $\rho>0$. Требуется найти оператор-функцию $F(\zeta)\in L_\infty(H_1,H_2)$ такую, что $\|F\|_\infty\leqslant\rho$ и $c_{-k}(F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\zeta^k F(\zeta)|d\zeta|=\gamma_k \quad (k=1,2,\ldots)$

В работе [7] В. М. Адамяном доказано, что матрица дробно-линейного преобразования, дающего описание решений задачи (B) во вполне неопределенном случае, является почти всюду J—унитарной на границе $|\zeta|=1$. Применяя этот результат, можно показать, что справедлива

* В. П. Потаповым и И. В. Ковалишиной было показано другим методом, что матричная проблема Неванлинны—Пика адекватна изучению бесконечного произведения бинарных множителей полного ранга при условии, что $z_j\neq z_k$, когда $j\neq k$ [3,4,5]

Теорема 2. *Бесконечное произведение Бляшке—Потапова*

$$\Pi(z)=\overset{\frown}{\prod_{l=1}^{\infty}}\left[I+\left(\frac{z-z_l}{1-\bar{z}_l z}\,\frac{|z_l|}{z_l}-1\right)P_l\right],$$

где $z_j\neq z_k$ *при* $j\neq k$, P_l*—произвольный положительный* J*—ортогональный проектор, почти всюду* J*—унитарно на границе* $|\zeta|=1$, *то есть*

$$\Pi^*(\zeta)J\Pi(\zeta)=J,\quad \textit{п. в. при } |\zeta|=1$$

2. *Вырожденный случай.* Всегда можно считать, что первые r последовательных главных миноров матрицы формы $A(\xi,\xi)$ отличны от нуля:

$$\Delta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq 0,\qquad \Delta\begin{pmatrix}1\,2\\1\,2\end{pmatrix}\neq 0,\ldots,\qquad \Delta\begin{pmatrix}1\,2\ldots r\\1\,2\ldots r\end{pmatrix}\neq 0$$

Введем обозначение

$$\Delta_r^{j,k}=\Delta\begin{pmatrix}1\,2\ldots r\,j\\1\,2\ldots r\,k\end{pmatrix},\ j,k=r+1,\ldots,m.$$

Воспользовавшись теоремой 1, получим описание решений задачи (A), удовлетворяющих первым r условиям:

$$w(z)=[\varepsilon_r(z)]R(z),$$

где

$$R(z)=\overset{\frown}{\prod_{l=1}^{p}}\left[I+\left(\frac{z-z^{(l)}}{1-\bar{z}^{(l)}z}\,\frac{|z^{(l)}|}{z^{(l)}}-1\right)P_l\right] \tag{6}$$

$1\leq p\leq r$, p_l-J ортогональный проектор на подпространство L_l, определяемое по формулам (2), $\varepsilon_r(z)$ — произвольная оператор-функция из класса $W_{12}(D)$.

Требования, чтобы оператор-функция $w(z)$ удовлетворяла остальным условиям задачи (A), приводят к тому, чтобы $\varepsilon_r(z)$ должна удовлетворять равенствам:

$$\varepsilon_r(z_j)a_j^{(r+1)}=c_j^{(r+1)},\quad j=r+1,\ldots,m,$$

где

$$\begin{pmatrix}a_j^{(r+1)}\\-c_j^{(r+1)}\end{pmatrix}=R(z_j)\begin{pmatrix}a_j\\-c_j\end{pmatrix},\quad j=r+1,\ldots,m,$$

а $R(z)$ определяется по формуле (6).

Так как $\operatorname{rang}A(\xi,\xi)=r$, то $\Delta_r^{j,k}=0$ при $j,k=r+1,\ldots,m$, откуда следует, что

$$c_j^{(r+1)*}c_k^{(r+1)}=a_j^{(r+1)*}a_k^{(r+1)},\quad j,k=r+1,\ldots,m. \tag{7}$$

Пусть $H_1^{(1)}=\text{л. о.}[a_j^{(r+1)}]_{j=r+1}^m$, $\qquad H_2^{(1)}=\text{л. о.}[c_j^{(r+1)}]_{j=r+1}^m$.

Исходя из равенств (7) и воспользовавшись известными предложениями теории аналитических оператор-функций (см., например, ([5])), легко показать, что матричное представление оператор-функции $\varepsilon_r(z)$ соответствующее разложениям $H_1=H_1^{(1)}\oplus H_1^{(2)}$, $H_2=H_2^{(1)}\oplus H_2^{(2)}$ имеет вид

$$\varepsilon_r(z)=\begin{pmatrix}I_\mu & \\ & \varepsilon_{r+1}(z)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

где $\varepsilon_{r+1}(z)$ произвольная оператор-функция класса $W'_{12}(D)$ поряд
$$|(n_2-\mu)\times(n_1-\mu)|, \quad \mu=\dim H^{(1)}.$$

Таким образом показано, что формулы (6), (8) дают описан решений задачи (A) при $N=\{1, \ldots, m\}$ в вырожденном случае.

Заметим, что если $\mu>n_1$, то $\varepsilon_{r+1}(z)=\mathrm{const}$ и задача (A) имее единственное решение.

Приношу глубокую благодарность М. Г. Крейну за постанов задачи и Ю. П. Гинзбургу за полезные обсуждения.

Одесский инженерно-строительный институт

Ի. Պ. ՖԵԴՉԻՆԱ

Նևանլիննա—Պիկի շոշափողային պրոբլեմի լուծումների նկարագրություն

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը (Նևանլիննա-Պիկի շոշափողային խնդիր)՝

տված են

$$z_l, \ |z_l|<1 \quad l=1,2,\ldots$$

կետերի և

$$\{a^l\}, \quad \{c_l\}, \quad l=1,2,\ldots$$

վեկտորների հաջորդականությունները։

Պետք է գտնել այնպիսի օպերատոր-ֆունկցիա $w(z)$, *որը գործում* N_1 *տարածությունից* N_2 *տարածության* $\dim N_1<\dim N_2<\infty$, *հոլոմորֆ* $D=\{z|z|<1\}$ *միավոր շրջանում, նորման* $\leqslant 1$ *և* $w(z_l)a_l=c_l, \quad l=1,2,\ldots$

Հոդվածում ստացված է Նևանլիննա-Պիկի շոշափողային խնդրի լուծում ների նկարագրությունը։ Հատված պրոբլեմի դեպքում ($l=1, 2, \ldots, m$) *նկարագրությունն ստացված է ընդհանուր դեպքում (ինչպես չվերածվող, այնպես էլ վերածվող)։ Լրիվ անորոշ դեպքում ստացված է լուծումների նկարագրությունը Նևանլիննա-Պիկի լրիվ շոշափողային պրոբլեմի դեպքում։ Հաստատված է շոշափողային պրոբլեմի համարժեքությունը Բլյաշկե-Պոտապովի առաջին պատիկությամբ էլեմենտար բազմապատկիչների արտադրյալի ուսումնասիրությունը, ինչպես նաև ապացուցված է թեորեմ այդպիսի արտադրյալի J-ունիտարության մասին միավոր շրջանագծի վրա։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. П. Федчина*, Матем. исследования, т. VII, вып. 4 (26), 213—227, 1972. [2] *В. П. Потапов*, Труды Моск. математич. общества, 4, 125—236 (1955). [3] *Ю. П. Гинзбург*, «Известия вузов», Математика, 1 (32), 42—53 (1963). [4] *И. В. Ковалишина*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, 97—98, 1971. [5] *В. П. Потапов*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций, Харьков, 1971. [6] *В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн*, «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, т. VI, № 2—3, 1971, 87—112. [7] *В. М. Адамян*, Функц. анализ и его приложения, т. 7, вып. 4, 1—16, 1973.