ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 5

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. Х. Григорян

Передача гармонической сосредоточенной силы от стрингера бесконечной длины к двум упругим полуплоскостям

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 10/VII 1974)

В настоящей статье рассматривается динамическая контактная задача о передаче гармонической сосредоточенной силы к двум полуплоскостям, сцепленным между собой вдоль своих границ упругой накладкой бесконечной длины. Решение исследуемой задачи сводится к решению системы интегральных уравнений, замкнутое решение которой строится при помощи преобразования Фурье. Кроме того, получены асимптотические формулы для напряжений, содержащие в явном виде порции расширяющих и искажающих волн.

1. *Постановка задачи. Вывод разрешающего уравнения.* Пусть две упругие полуплоскости, с одинаковыми физическими константами, сцеплены между собой вдоль своих границ упругой бесконечной накладкой малой толщины h (рис. 1). Требуется определить законы распределения контактных напряжений на линии соединения накладки с упругими полуплоскостями, когда в центре накладки действует гармоническая горизонтальная сосредоточенная сила $P\delta(x)\sin\omega t$. Для простоты вычислений в дальнейшем эту силу возьмем в виде $P\delta(x)e^{-i\omega t}$. Оче-

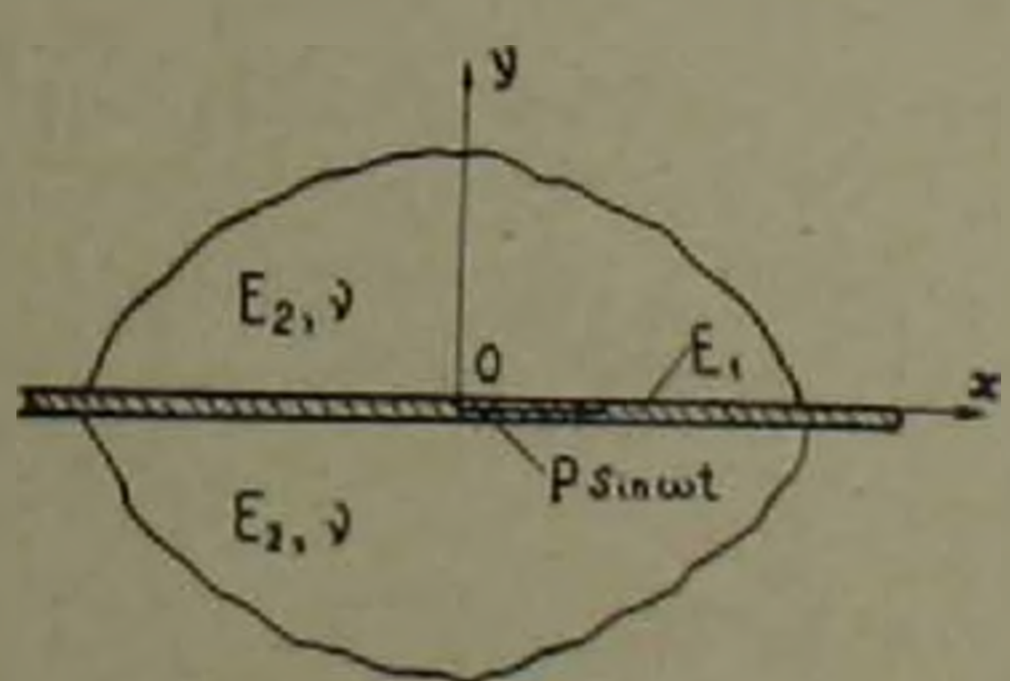

Рис. 1

видно, что мнимая часть с обратным знаком решения обсуждаемой задачи, построенного для случая силы указанного вида, представляет собой интересующее нас решение. Вследствие малости толщины накладки считается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется, что приводит к условию постоянства вертикальных перемещений граничных точек упругих полуплоскостей, а под действием только горизонтальных сил накладка находится в одноосном напряженном состоянии ([1,2]). Отсюда вытекает, что амплитуда горизонтальных перемещений точек накладки будет удовлетворять уравнению ([3])

$$\frac{d^2 u_*^{(1)}(x)}{dx^2} + k^2 u_*^{(1)}(x) = \frac{2\tau_*(x)}{E_1 h} - \frac{P}{E_1 h}\delta(x), \quad k=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad |x|<\infty, \tag{1.1}$$

где $\tau_*(x)$ — амплитуда неизвестных тангенциальных контактных напряжений, E_1 — модуль упругости материала накладки, ρ_1 — плотность материала накладки. Кроме того, согласно сказанному для вертикальных перемещений будем иметь условие

$$v_*^{(1)}(x)=0, \quad |x|<\infty \tag{1.2}$$

Рассматривая установившиеся колебания накладки, положим

$$u^{(1)}(x,t)=u_*^{(1)}(x)e^{-i\omega t}, \quad \tau(x,t)=\tau_*(x)e^{-i\omega t}, \quad v^{(1)}(x,t)=v_*^{(1)}(x)e^{-i\omega t}.$$

Поступая совершенно аналогично тому, что было сделано в работе ([3]), для амплитуд горизонтальных и вертикальных перемещений точек границы упругой полуплоскости, когда на границе полуплоскости одновременно действуют горизонтальные и вертикальные гармонические силы, с интенсивностями амплитуд $\tau_*(x)$ и $q_*(x)$ соответственно, можно получить следующие выражения:

$$u_*^{(2)}(x) = -\frac{1}{\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty} K(|x-s|)\tau_*(s)ds + \frac{1}{\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x-s)q_*(s)ds,$$

$$v_*^{(2)}(x) = -\frac{1}{\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty} K^*(|x-s|)q_*(s)ds - \frac{1}{\mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x-s)\tau_*(s)ds,$$

где

$$K(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_2^2}\,e^{-i\sigma x}d\sigma}{(2\sigma^2-k_2^2)^2-4\sigma^2\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}},$$

$$K^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,e^{-i\sigma x}d\sigma}{(2\sigma^2-k_2^2)^2-4\sigma^2\sqrt{(\sigma^2-k_2^2)(\sigma^2-k_1^2)}},$$

$$\Pi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma\left[2\sigma^2-k_2^2-2\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma}{(2\sigma^2-k_2^2)^2-4\sigma^2\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}},$$

$$k_1=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\lambda_2+2\mu_2}}, \qquad k_2=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}, \quad |x|<\infty,$$

$q_*(x)$ — амплитуда нормальных контактных напряжений, λ_2, μ_2 — постоянные Ляме, ρ_2 — плотность материала полуплоскости.

Теперь заметим, что на линии соединения накладки с полуплоскостью должно выполняться условие

$$u_*^{(1)}(x) = u_*^{(2)}(x), \quad v_*^{(1)}(x) = v_*^{(2)}(x),$$

которое в сочетании с уравнением (1.1) и условием (1.2) задачу определения амплитуд $\tau_*(x)$ и $q_*(x)$ неизвестных напряжений сводит к решению системы интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[K(|x-s|)+\frac{\lambda}{2ki}e^{ik|x-s|}\right]\tau_*(s)ds-\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x-s)q_*(s)ds=\frac{\lambda P}{2ki}e^{ik|x|}$$

$$(1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}K^*(|x-s|)q_*(s)ds+\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x-s)\tau_*(s)ds=0, \quad \lambda=\frac{\mu_2}{E_1h}, \quad |x|<\infty.$$

2. *Решение системы интегральных уравнений* (1.3). Применяя к обеим частям системы (1.3) преобразование Фурье и используя свойство свертки, получаем систему алгебраических уравнений относительно $\bar{\tau}_*(\sigma)$ и $\bar{q}_*(\sigma)$, где $\bar{\tau}_*(\sigma)$ и $\bar{q}_*(\sigma)$ преобразования Фурье функций $\tau_*(x)$ и $q_*(x)$ соответственно. Из этой системы уравнений, получаем

$$\bar{\tau}_*(\sigma)=-\lambda P\frac{k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}{(\sigma^2-k^2)\left[\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}-\sigma^2\right]-2\lambda k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}},$$

$$(2.1)$$

$$\bar{q}_*(\sigma)=\lambda P\frac{i\sigma\left[2\sigma^2-k_2^2-2\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}\right]}{(\sigma^2-k^2)\left[\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}-\sigma^2\right]-2\lambda k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}.$$

Очевидно, что знаменатели в выражении функций $\bar{\tau}_*(\sigma)$ и $\bar{q}_*(\sigma)$ не имеют корней, обусловленных существованием поверхностных волн, так как существование этих волн объясняется наличием свободной границы, которая отсутствует в разбираемом случае. Следовательно на границе раздела полуплоскостей с одинаковыми упругими свойствами будут проходить волны расширения и искажения.

Отметим, что $\tau_*(x)$ $q_*(x)$ будут выражаться следующими формулами:

$$\tau_*(x)=-\frac{\lambda P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\,e^{-i\sigma x}d\sigma}{(\sigma^2-k^2)\left[\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}-\sigma^2\right]-2\lambda k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}},$$

$$q_*(x)=\frac{\lambda P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma\left[2\sigma^2-k_2^2-2\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}\right]e^{-i\sigma x}d\sigma}{(\sigma^2-k^2)\left[\sqrt{(\sigma^2-k_1^2)(\sigma^2-k_2^2)}-\sigma^2\right]-2\lambda k_2^2\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}.$$

Поступая таким же образом, как в работе [3], для $\tau_*(x)$ и $q_*(x)$ получаем следующие асимптотические представления при больших x:

$$\tau_*(x)=-\frac{i\nu P}{|x|^{3/2}}\left[T_v\exp i\left(k_1|x|+\frac{\pi}{4}\right)+T_e\exp i\left(k_2|x|+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$q_*(x)=-\frac{i\nu P}{x|x|^{1/2}}\left\{\sqrt{|Q_v^{(1)}|^2+|Q_v^{(2)}|^2}\exp i\left[k_1|x|+\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{Q_v^{(2)}}{Q_v^{(1)}}\right]+\right.$$

$$\left.+Q_e\exp i\left(k_2|x|+\frac{3\pi}{4}\right)\right\}\quad |x|\to\infty$$

Здесь

$$T_v=-\frac{k_2^2\sqrt{2k_1}}{\sqrt{\pi}\,k_1^2(k_1^2-k^2)},\quad T_e=-\frac{(k_2^2-k^2)(k_2^2-k_1^2)}{\sqrt{2\pi k_2}\,k_2(k_2^2-k^2+2i\nu\sqrt{k_2^2-k_1^2})^2},$$

$$Q_v^{(1)}=\frac{k_2^2\sqrt{k_2^2-k_1^2}}{\sqrt{\pi}\,k_1^2\sqrt{2k_1}(k_1^2-k^2)},\qquad Q_v^{(2)}=\frac{\nu(k_2^2-2k_1^2)}{\sqrt{\pi}\,k_1^2\sqrt{2k_1}(k_1^2-k^2)^2},$$

$$Q_e=\frac{\sqrt{k_2^2-k_1^2}\,(k_2^2-k^2+4i\nu\sqrt{k_2^2-k_1^2})}{2\sqrt{2\pi k_2}\,(k_2^2-k^2+2i\nu\sqrt{k_2^2-k_1^2})^2}.$$

Отметим, что всегда имеется в виду; что $k_1>k$. В общем случае, когда $k_1=k$, имеем

$$q_*(x)=-i\nu P\left\{\bar{Q}_v\frac{\operatorname{sign}x}{|x|^{1/2}}\exp i\left(k_1|x|+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{|B_v^{(1)}|^2+|B_v^{(2)}|^2}}{x|x|^{1/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp i\left(k_1|x|+\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{B_v^{(2)}}{B_v^{(1)}}\right)+Q_e\frac{1}{x|x|^{1/2}}\exp i\left(k_2|x|+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

при $|x|\to\infty$,

$$\tau_*(x)=-\frac{i\nu P}{|x|^{3/2}}\left[\bar{T}_v\exp i\left(k_1|x|+\frac{\pi}{4}\right)+\bar{T}_e\exp i\left(k_2|x|+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Здесь

$$B_v^{(1)}=\frac{k_1^2\sqrt{k_2^2-k_1^2}\,(k_2^2-4k_1^2)}{4\sqrt{2\pi k_1}\,\nu^2k_2^2},$$

$$B_v^{(2)}=\frac{\nu^2k_2^4(3k_2^2-22k_1^2)-2k_1^6(2k_1^2-k_2^2)}{16\sqrt{2\pi k_1}\,\nu^2k_2^6},$$

$$\bar{T}_v=\frac{k_1^{5/2}}{2\sqrt{2}\,\nu^2k_2^2},\qquad \bar{T}_e=\frac{k_1^2-k_2^2}{k_2^{3/2}\sqrt{2\pi}\,(k_2^2-k_1^2+2\nu)^2}.$$

Поскольку величины тангенциальных и нормальных контактных напряжений являются мнимыми частями с обратными знаками от функций

$$\tau(t,\ x)=\tau_*(x)e^{-i\omega t},\quad q(t,\ x)=q_*(x)e^{-i\omega t},$$

то для них получим следующие асимптотические выражения при больших x

$$-\mathrm{Im}\,\tau(t,\ x)=\frac{\lambda P}{|x|^{3/2}}\left[T_v\cos\left(\omega t-k_1|x|-\frac{\pi}{4}\right)+T_e\cos\left(\omega t-k_2|x|-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$-\mathrm{Im}\,q(t,\ x)=\frac{\lambda P}{x|x|^{1/2}}\left\{\sqrt{|Q_v^{(1)}|^2+|Q_v^{(2)}|^2}\cos\left[\omega t-k_1|x|-\frac{\pi}{4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{arctg}\frac{Q_v^{(2)}}{Q_v^{(1)}}\right]+Q_e\cos\left(\omega t-k_2|x|-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\quad \text{при}\quad k_1>k.$$

Аналогичную формулу можно получить также для случая $k_1=k$.

Пользуясь случаем, выражаю свою искреннюю признательность академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за предложенную задачу и ценные указания.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Անվերջ երկար վերադիրից կենտրոնացած հարմոնիկ ուժի փոխանցումն երկու առաձգական կիսահարթություններին

Դիտարկվում է դինամիկական կոնտակտային խնդիր երկու կիսահարթությունների կենտրոնացած հարմոնիկ ուժի փոխանցման մասին, որոնք իրենց եզրագծերի երկայնքով միակցված են միմյանց հետ անվերջ երկարության առաձգական վերադիրի միջոցով։ Հետազոտվող խնդրի լուծումը բերվում է ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, որի փակ լուծումը կառուցվում է Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ։ Բացի դրանից, ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր լարումների համար, որոնք բացահայտ ձևով պարունակում են ընդլայնական և աղավաղման ալիքների բաժինները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Melan*, Ingr—Arch., Bd 3, № 2, S. 123 (1932). [2] *H. Bufler*, VDI-Forschungsheft 485, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Band 27, 5–44 (1961). [3] *Э. Х. Григорян*, МТТ, вып. 5 (1972).