ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 5

УДК 53.01.45+537+538

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

С. А. Смирнов

Дуальное преобразование электродинамики как каноническое

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Иосифьяном 21/VII 1974)

В работе ([1]) были введены две дуальных инверсно-сопряженных системы уравнений электродинамики (системы „Q“ и „Φ“):

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ &\mathrm{rot}\, H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\, B = 0 \quad \mathrm{div}\, D = \rho_e \\ &B = \mathrm{rot}\, A \\ &E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi_e \end{aligned}\right| \text{(1а)} \qquad \left.\begin{aligned} &\mathrm{rot}\, E^* = \chi + \frac{\partial B^*}{\partial t} \\ &\mathrm{rot}\, H^* = -\frac{\partial D^*}{\partial t} \\ &\mathrm{div}\, B^* = \rho_m \quad \mathrm{div}\, D^* = 0 \\ &D^* = \mathrm{rot}\, K \\ &H^* = -\frac{\partial K}{\partial t} - \nabla \varphi_m \end{aligned}\right| \text{(1б)}$$

В настоящей работе показано, что эти системы связаны каноническим преобразованием, т. е. q и Φ по отношению друг к другу играют роль координат и соответствующих им импульсов.

Рассмотрим сначала систему „Q“. Ограничимся случаем однородной изотропной непроводящей среды без дисперсии. Функция Гамильтона указанной системы имеет вид

$$P_e = P_{e1} + P_{e2}, \quad P_{e1} = \sum_i \{e_{ei}\, \varphi_e(R_i) + \sqrt{m_i^2 c^4 + c^2 (P_i - e_{ei} A(R_i))^2}\},$$

$$P_{e2} = \frac{1}{2} \int dx (ED + HB). \tag{2}$$

Здесь P_i — импульс, R_i — радиус-вектор частицы с массой m_i и зарядом $e_{ei} \cdot F$. Мы будем использовать кулоновскую калибровку для потенциала: $\mathrm{div}\, A = 0$.

Поле можно считать периодическим для куба с ребром L и использовать дискретное импульсное представление

$$A(x,t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{i=1,2}\sum_{\lambda} q_{\lambda i}(t)A_{\lambda i}(x), \qquad A_{\lambda i}(x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e_{\lambda i}e^{ik_\lambda x} \tag{3}$$

$k_\lambda=\frac{2\pi}{L}(l_\lambda, m_\lambda, n_\lambda)$; l, m, n — целые числа, $\lambda=(l,m,n)$, $(e_{\lambda i}k_\lambda)=0$, $(e_{\lambda i}e_{\lambda j})=\delta_{ij}$.

В кулоновской калибровке роль потенциала φ_e сводится к мгновенному кулоновскому взаимодействию частиц ([2]), и он не приводит к появлению новых степеней свободы.

Из (2) и (3) имеем выражение для гамильтониана поля

$$P_e=P_{e1}+\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{\lambda}(q_{\lambda i}^2+\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2),$$

$$\omega_\lambda^2=\frac{k_\lambda^2}{\varepsilon\mu}.$$

В отсутствие зарядов и токов поле полностью описывается гамильтонианом

$$P_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{\lambda}(p_{\lambda i}^2+\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}^2), \tag{4}$$

которому соответствуют уравнения движения

$$p_{\lambda i}=\dot q_{\lambda i}, \qquad \dot p_{\lambda i}=-\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}, \qquad \ddot q_{\lambda i}+\omega_\lambda^2 q_{\lambda i}=0$$

(т. е. поле распадается на осцилляторы). К аналогичному распадению поля на осцилляторы приводит использование лоренцевской калибровки, так что выбор кулоновской калибровки для нас не существенен. Отметим также, что эти две калибровки связаны каноническим преобразованием, производящая функция которого приведена в ([2]).

В координатном представлении P_e имеет вид

$$P_e=\frac{1}{2}\int dx\left\{\frac{\pi^2(x,t)}{\varepsilon\mu}+[\mathrm{rot}\bar A(x,t)]^2\right\}, \tag{5}$$

где π — обобщенный импульс, $\bar A$ — обобщенная координата,

$$\pi=-\frac{\bar E}{\bar c}=\frac{1}{\bar c^2}\frac{\partial\bar A}{\partial t},$$

$$\bar H=\mathrm{rot}\bar A,\ \bar C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\ \bar A=\frac{A}{\sqrt{\mu}},\ \bar E=E\sqrt{\varepsilon}=D/\sqrt{\varepsilon},\ \bar H=H\sqrt{\mu}=B/\sqrt{\mu},$$

$\mathrm{div}\bar A=0.$

Для (4) можно рассмотреть каноническое преобразование

$$p'_{\lambda i}=p_{\lambda i}\cos\Theta-q_{\lambda i}\omega_\lambda\sin\Theta, \quad q'_{\lambda i}=q_{\lambda i}\cos\Theta+\frac{p_{\lambda i}}{\omega_\lambda}\sin\Theta.$$

Оно порождается следующей производящей функцией $Q(q,q')$ $\left(p=\frac{\partial Q}{\partial q},\ p'=-\frac{\partial Q}{\partial q'}\right)$:

$$Q(q_{\lambda l},q'_{\lambda l})=\frac{-1}{\sin\Theta}\sum_{\lambda l}\omega_\lambda\left[\frac{q^2_{\lambda l}+q'^2_{\lambda l}}{2}\cos\Theta-q_{\lambda l}q'_{\lambda l}\right].$$

В координатном представлении производящая функция и преобразование имеют вид

$$Q(\bar{A},\bar{A}')=\frac{-1}{2c\sin\Theta}\int dx\,[(\bar{A}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}+\bar{A}'\,\mathrm{rot}\,\bar{A}')\cos\Theta-(\bar{A}\,\mathrm{rot}\,\bar{A}'+\bar{A}'\,\mathrm{rot}\,\bar{A})]$$

$$\left(\bar{\pi}=\frac{\partial Q(\bar{A},\bar{A}')}{\partial\bar{A}},\quad \bar{\pi}'=-\frac{\partial Q(\bar{A},\bar{A}')}{\partial\bar{A}'},\quad P=P',\right)$$

$$\bar{E}'=-\bar{\pi}'c=-\bar{\pi}c\cos\Theta+\mathrm{rot}\,\bar{A}\sin\Theta=\bar{E}\cos\Theta+\bar{H}\sin\Theta$$

$$\bar{H}'=\mathrm{rot}\,\bar{A}'=\bar{\pi}c\sin\Theta+\mathrm{rot}\,\bar{A}\cos\Theta=-\bar{E}\sin\Theta+\bar{H}\cos\Theta. \qquad (6)$$

В вакууме (6) представляет собой дуальное преобразование обычного вида. (см., например ([3])). Таким образом, нам удалось произвести дуальный поворот с помощью канонического преобразования.

В частном случае $\Theta=-\frac{\pi}{2}$ преобразование

$$q^*_{\lambda l}=\frac{p_{\lambda l}}{\omega_\lambda},\qquad p^*_{\lambda l}=-q_{\lambda l}\,\omega_\lambda$$

соответствует переходу от системы „Q" к системе „Φ"

$$D^*=\mathrm{rot}\,K,\quad H^*=-\frac{\partial K}{\partial t}.$$

Если в системе „Q" можно ввести взаимодействие поля с электрическими зарядами и токами (2), то система „Φ" позволяет описать взаимодействие поля с магнитными зарядами и токами

$$P_m=\sum[e_{mi}\varphi_m(R_i)+\sqrt{m_i^2c^4+c^2(P_i-e_{mi}K(R_i))^2}]+\frac{1}{2}\int dx(E^*D^*+H^*B^*).$$

Соответствующие лагранжианы имеют вид

$$L_e=\int dx\left\{-\rho_e\varphi_e+jA+\frac{ED-HB}{2}\right\},\; L_m=\int dx\left\{-\rho_m\varphi_m+jK+\right.$$

$$\left.+\frac{H^*B^*-E^*D^*}{2}\right\}. \qquad (7)$$

Таким образом мы видим, что (в соответствии с ([1])) в электродинамике естественно рассматривать две равноправные системы (1а) и (1б). Эти системы эквивалентны только в отсутствие зарядов и токов. Система „Q" описывает взаимодействие поля с электрическими зарядами и токами, а „Φ"—с магнитными. Поэтому одни электромагнитные явления удобнее исследовать в системе „Q", а другие—в системе „Φ". При рассмотрении электромагнитного осциллятора (идеаль-

ного колебательного контура) можно пользоваться обеими системами ([1]). Подробный сравнительный анализ этих систем дан в ([1]). Совместное использование двух систем дает более полное описание электромагнитных явлений.
вопрос рассматривается в ([4,5]).

Интересно рассмотреть квантование в таком формализме. Этот

Автор выражает благодарность Н. П. Коноплевой и Н. В. Тютину за полезные обсуждения.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт электромеханики

Ս. Ա. ՍՄԻՐՆՈՎ

Էլեկտրադինամիկայի կանոնային երկձևային ձևափոխություններ

Սույն աշխատանքում ցույց է տրված, որ երկու դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմները Q և Φ տարածությունների համար կապված են իրար հետ կանոնային ձևափոխություններով, որոնց մեջ Q և Φ մեծություններն իրար նկատմամբ արտահայտում են կոորդինատներ և համապատասխան իմպուլսներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Иосифьян*, ДАН Арм.ССР, т. 51, 1 (1970). [2] *В. Гайтлер*, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956. [3] *В. И. Стражев*, Весці АН БССР, № 5, 72 (1971); *В. И. Стражев, Л. М. Томильчик*, ЭЧАЯ, т. 4, 187 (1973). [4] *А. Г. Иосифьян*, ДАН Арм.ССР, т. 55, 98 (1972); Elektrotechnicky Obzor, 61, 521 (1972). [5] *А. Г. Иосифьян*, ДАН Арм.ССР, т. 57, 232 (1973).