ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIX 1974 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Э. В. Белубекян, В. Ц. Гнуни

О прочности продольно сжатой прямоугольной пластинки в закритической стадии

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 28/VI 1974)

В настоящей работе делается попытка показать возможность увеличения несущей способности или уменьшения веса пластинки, допуская ее работу в закритической стадии ([1-3]). Из условия прочности определяются более выгодные значения допускаемых нагрузок или веса пластинки при прогибах, сравнимых с толщиной.

1. Пусть прямоугольная изотропная пластинка размерами $a \times b$, толщины h шарнирно оперта по контуру и подвергается действию сжимающих усилий P_1, P_2 в срединной поверхности.

Уравнения, характеризующие поведение пластинки после потери устойчивости плоской формы равновесия, имеют вид

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2 F + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0, \tag{1.1}$$

$$D\Delta^2 w + P_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \tag{1.2}$$

где обозначения общепринятые.

Напряжения в произвольной точке (x, y, z) пластинки в закритической стадии определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{P_1}{h} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{P_2}{h} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{1.3}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{Ez}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\tau_{xz}=\frac{1}{2}\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial\Delta w}{\partial x},$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{2}\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial\Delta w}{\partial y}. \qquad (1.4)$$

Пусть пластинка теряет устойчивость плоской формы с образованием m и n полуволн соответственно по направлениям x и y, поэтому естественно предполагать, что дальнейшее выпучивание произойдет по форме, близкой к этой.

Решение системы уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания $v=w=0$, $T_x=0$, $M_x=0$ при $x=0$, $x=a$ и $u=w=T_y=M_y=0$ при $y=0$, $y=b$, представляется в виде

$$w=w_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y,$$

$$F=F_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y, \quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n=\frac{n\pi}{b}, \qquad (1.5)$$

Использование метода Бубнова—Галёркина дает

$$w_{mn}^2=\frac{1}{\gamma_{mn}}\left(\lambda_m^2P_1+\mu_n^2P_2-K_{mn}\right),$$

$$F_{mn}=-\frac{3}{32}\,\frac{ab}{\lambda_m\mu_n}\left(\lambda_m^2P_1+\mu_n^2P_2-K_{mn}\right), \qquad (1.6)$$

где

$$K_{mn}=D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2, \quad \gamma_{mn}=\frac{519}{9}\,\frac{Eh}{a^2b^2}\,\frac{\lambda_m^2\mu_n^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}.$$

Имея значения w_{mn} и F_{mn} (1.6), из формул (1.3), (1.4), в силу (1.5), можно получить окончательные выражения для напряжений.

Пусть $P_1=P$, $P_2=\chi P$, тогда из условия прочности

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}=[\sigma]$$

при заданной толщине можно определить параметр нагрузки P или по заданному значению P можно найти h. Найденные значения следует сопоставить с

$$P_{kp}=\frac{K_{mn}}{\lambda_m^2+\chi\mu_n^2} \quad \text{или} \quad h=\sqrt[3]{12\,\frac{1-\nu^2}{E}\,\frac{\lambda_m^2+\chi\mu_n^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\cdot P} \qquad (1.7)$$

полученными из условия устойчивости плоской формы.

2. Рассмотрим конкретный пример. Пусть $a=b$, $\chi=0$, тогда $m=n=1$.

В качестве условия прочности, с запасом, принимается, что максимальное нормальное напряжение $\sigma_{max}\leqslant[\sigma]$.

Очевидно, что

$$\sigma_{max} = \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Определяя σ_{max} из (1.3), условие прочности запишется в виде

$$\frac{\pi^4}{32}\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{32}{3\pi^2}\bar{P}\frac{1}{\delta} + \bar{P}\frac{1}{\delta} - \delta^2 + \delta\sqrt{6\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\bar{P}\frac{1}{\delta} - \delta^2\right)}\right] = [\sigma], \qquad (2.1)$$

где

$$\bar{P} = \frac{3(1-\nu^2)}{\pi^2 a E}P, \qquad \delta = \frac{h}{a}.$$

Из условия (2.1) при заданном $\bar{P}$ можно определить параметр толщины δ, который следует сравнивать с $\delta_0 = \sqrt{\bar{P}}$, полученным из условия устойчивости (1.7).

Для стальной пластинки ($E = 2.10^6$ *кг/см*^{2}, $[\sigma] = 2.10^3$ *кг/см*^{2}, $\nu = 0{,}3$) получается следующая таблица:

$10^6\,\bar{P}$	8,0	1,2	0,60	0,45	0,30
$10^2\,\delta_0$	2,0	1,1	0,84	0,77	0,67
$10^2\,\delta$	2,0	1,0	0,67	0,50	0,40
w/h	0,99	1,2	1,9	2,7	3,2

Как видно из таблицы, вес тонких пластинок можно существенно уменьшить, допуская их работу в закритической стадии с удовлетворением условия прочности. При этом в новом изогнутом устойчивом положении равновесия пластинка принимает прогибы порядка $(2 \div 3)h$.

При одной и той же толщине пластинки $\delta = \delta_0 = 0{,}67 \cdot 10^{-2}$, несущая способность пластинки увеличивается в два раза (от $\bar{P} = 0{,}3 \cdot 10^{-6}$ до $0{,}6 \cdot 10^{-6}$).

Для сравнительно толстых пластинок ($\delta = 2 \cdot 10^{-2} \div 1 \cdot 10^{-2}$) выигрыш в весе незначителен.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Սեղմված ուղղանկյուն սալի ամրությունը հետկրիտիկական վիճակում

Աշխատանքում փորձ է արվում ցույց տալ սալի կրողունակության մեծացման կամ քաշի փոքրացման հնարավորությունը, թույլատրելով նրա աշխատանքը հետկրիտիկական վիճակում։ Ամրության պայմանից որոշվում են սալի աշխատանքի ավելի նպաստավոր պայմաններ, թույլատրելով հաստության համեմատելի ճկվածքներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Болотин*. Нелинейная теория упругой устойчивости «в большом». Сб. «Расчеты на прочность», вып. 3, Машгиз, М., 1958. [2] *А. С. Вольмир*. Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, М., 1956. [1] *В. И. Феодосьев*. Упругие элементы точного приборостроения, Оборонгиз, М., 1949.