ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 5

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

С. М. Меликян

Конструктивные трансфинитные иерархии псевдочисел

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 17/VI 1974)

В ряде разделов конструктивного математического анализа оказывается целесообразным рассмотрение числовых классов, более широких, чем класс конструктивных действительных чисел (см. [1] и [2] стр. 126). В связи с этим, вводится понятие псевдочисел, представляющих собой алгорифмически определяемые псевдосходящиеся в себе последовательности рациональных чисел (см. [2], стр. 127).

В этой статье рассматривается некоторое обобщение понятия псевдочисла. А именно, пусть O—система ординальных обозначений Клини (см. [3], стр. 268) и $v \in O$. С каждым e, где $e <_0 v$ мы связываем класс конструктивных объектов ПСП$_e$ согласно следующим правилам:

1. ПСП$_1$ есть класс рациональных чисел.

2. Если e имеет вид $c +_0 1$, то ПСП$_e$ есть класс псевдосходящихся в себе алгорифмических последовательностей объектов из ПСП$_c$.

3. Если e является обозначением предельного ординала, то ПСП$_e = \bigcup\limits_{c <_0 e}$ ПСП$_c$.

В этой иерархии, очевидно, класс обычно рассматриваемых псевдочисел (смр. [2]), стр. 127) соответствует классу ПСП$_2$.

Предполагается, что задано $v \in O$ и рассматриваются $e <_0 v$. Доказывается, что (1) все классы ПСП$_e$ существенно различны при различных e, (2) при e, являющихся обозначениями предельных ординалов, эти классы в определенном смысле конструктивно счетны, а при непредельных—эффективно конструктивно несчетны.

Переходим теперь к точным формулировкам определений и утверждений.

Введем некоторые определения вспомогательных функций и предикатов.

Через $\mathrm{ex}_i y$ обозначим показатель наивысшей степени $(i+1)$-ого простого числа, на которую делится y (см. [4], стр. 60); $C(x, y)$, $l(x)$

и $r(x)$ — функции канторовской нумерации пар натуральных чисел (см. ([4]), стр. 63). Через $|e|$ обозначим частично-рекурсивную функцию, имеющую геделев номер e (см. ([3]), стр. 303). Посредством $!\,|e|(x)$ обозначим суждение „$|e|$ определена в точке x". O — клиниевская система ординальных обозначений, и $<_0$ — предикат частичного упорядочения на O. (см. ([3]), стр. 268). Зафиксируем конструктивное взаимнооднозначное соответствие R между натуральными числами и рациональными числами. Пусть $R_1(n,m)=y$, где $R(y)=R(n)+R(m)$. Через φ, ψ, l, G, H, обозначим примитивно рекурсивные функции, такие что

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x=0 \text{ или } x=2k+1; \\ \varphi(\mathrm{ex}_0 x) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$\psi(x,y)=\begin{cases} \psi(x,\ \mathrm{ex}_0 y)+1, & \text{если } \mathrm{ex}_0 y > x; \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$l(x)=y, \quad \text{где} \quad r(y)=2^{r(x)} \ \&\ \forall z[\{l(y)\}(z)=x].$$

$$G(0,y)=y;$$

$$G(x,y)=l(G(x-1,\ y)).$$

$$H(x,y)=G(\psi(r(x),\ r(y)),x).$$

Через $\leqslant_0$ обозначим предикат, который определяется соотношением:

$$a\leqslant_0 b \rightleftharpoons a<_0 b \text{ или } a=b.$$

Частично-рекурсивная функция $\max_0$ определяется следующими условиями:

$$\max_0(x,y)\simeq\begin{cases} x, & \text{если } y\leqslant_0 x; \\ y, & \text{если } x<_0 y.\end{cases}$$

Все суждения в дальнейшем понимаются конструктивно (см. ([6]). Посредством P обозначим предикат, определенный следующими соотношениями:

$$P(v,1,n,a,b) \rightleftharpoons v\in O \ \&\ [r(a)=r(b)=1] \ \&\ |R(l(a))-R(l(b))|\leqslant|R(n)|;$$

$$P(v,2^d,n,a,b)\rightleftharpoons v\in O \ \&\ 2^d\leqslant_0 v \ \&\ [[r(a)=r(b)=2^d \ \&$$
$$\&\ \neg\neg\exists t\forall x[x\geqslant t\supset P(v,d,n,\{l(a)\}(x),\{l(b)\}(x))]]\vee$$
$$\vee[r(b)=2^d \ \&\ r(a)<_0 2^d \ \&\ [[\varphi(r(a))=\varphi(r(b)) \ \&$$
$$\&\ P(v,2^d,n,H(a,b),b)]\vee[\varphi(r(a))\neq\varphi(r(b)) \ \&$$
$$\&\ P(v,2^d,n,C(a,\varphi(r(b))),b)]]]\vee[r(a)=2^d \ \&\ r(b)<_0 2^d \ \&$$
$$\&\ [[\varphi(r(b))=\varphi(r(a)) \ \&\ P(v,2^d,n,a,H(b,a))]\vee$$
$$\vee[\varphi(r(b))\neq\varphi(r(a)) \ \&\ P(v,2^d,n,a,C(b,\varphi(a)))]]]].$$

$$P(v,3\cdot 5^d,n,a,b)\rightleftharpoons v\in O \ \&\ 3\cdot 5^d\leqslant_0 v \ \&\ [[r(a)=r(b)=$$
$$=3\cdot 5^d \ \&\ r(l(a))<_0 3\cdot 5^d \ \&$$
$$\&\ r(l(b))<_0 3\cdot 5^d \ \&\ P(v,\max_0(r(l(a)),r(l(b))),n,l(a),l(b))]\vee$$
$$\vee[r(b)=3\cdot 5^d \ \&\ r(a)<_0 3\cdot 5^d \ \&\ P(v,3\cdot 5^d,n,C(a,3\cdot 5^d),b)]\vee$$

$\vee [r(a)=3\cdot 5^d \,\&\, r(b) <_0 3\cdot 5^t \,\&\, P(v, 3\cdot 5^t, n, a, C(b, 3\cdot 5^t))]]$.

В остальных случаях $P(v,d,n,a,b)$ ложно. Введем предикат P':

$$P'(v,d,n,a,b) \rightleftarrows \forall m [R(m)>0 \supset P(v,d,R_2(n,m),a,b)]$$

Фактически физический смысл предиката $P'(v,d,n,a,b)$ состоит в том, что „расстояние" между a и b не превосходит $|R(n)|$.

Определение классов ПСП^v_e (где предполагается, что $v \in O$ и $e \leqslant_0 v$) дается следующими соотношениями:

$a \in \text{ПСП}^v_1 \rightleftarrows r(a)=1.$

$a \in \text{ПСП}^v_{2^d} \rightleftarrows r(a)=2^d \,\&\, \forall x [!\{l(a)\}(x) \,\&\, \{l(a)\}(x) \in \text{ПСП}^v_d] \,\&$

$\& \,\forall n \neg\neg\exists t \forall x [x > t \supset P'(v,d,n,\{l(a)\}(x),\{l(a)\}(t))]$.

$a \in \text{ПСП}^v_{3\cdot 5^d} \rightleftarrows r(a)=3\cdot 5^d \,\&\, r(l(a)) <_0 3\cdot 5^d \,\&\, l(a) \in \text{ПСП}^v_{r(l(a))}$.

Будем говорить, что a v-эквивалентно b $(a \underset{v}{\sim} b)$, если:

$$a \in \text{ПСП}^v_{r(a)} \,\&\, b \in \text{ПСП}^v_{r(b)} \,\&\, \forall n P'(v, \max_0(r(a), r(b)), n, a, b).$$

Пусть $A \subseteq \text{ПСП}^v_e$ и $B \subseteq \text{ПСП}^v_d$. Будем говорить, что A v-эквивалентно входит в B $(A \underset{v}{\subseteq} B)$, если:

$$\forall x \neg\neg\exists y [x \in A \supset y \in B \,\&\, x \underset{v}{\sim} y].$$

Пусть $A \subseteq \text{ПСП}^v_e$ и $B \subseteq \text{ПСП}^v_d$. Будем говорить, что A v-эквивалентно B $(A \underset{v}{\sim} B)$, если:

$$A \underset{v}{\overset{\subseteq}{\sim}} B \,\&\, B \underset{v}{\overset{\subseteq}{\sim}} A.$$

Пусть $A \subseteq \text{ПСП}^v_e$. Будем говорить, что A v-эквивалентно рекурсивно перечислимо (A v-э. р. п.), если:

$\neg\neg\exists B [B \subseteq \text{ПСП}^v_e \,\&\, B$ р. п. $\&\, A \underset{v}{\sim} B]$, где B р. п. означает: „B рекурсивно перечислимо".

Пусть $A \subseteq \text{ПСП}^v_d$. Множество A назовем эффективно несчетным (коротко A э. н.), если существует частично-рекурсивная функция f, такая что

$$\forall e \forall x \forall y [[!\{e\}(x) \,\&\, \{e\}(x) \in \text{ПСП}^v_d] \supset [f(e) \in A \,\&\, \neg f(e) \underset{v}{\sim} \{e\}(y)]].$$

Теорема 1.

$$\forall v \forall d \forall e [[v \in O \,\&\, e \leqslant_0 v \,\&\, d \leqslant_0 e] \supset \text{ПСП}^v_d \underset{v}{\overset{\subseteq}{\sim}} \text{ПСП}^v_e].$$

Теорема 2.

$\forall v \forall d \forall A [[v \in O \,\&\, d \neq 0 \,\&\, 2^d \leqslant_0 v \,\&\, A \subseteq \text{ПСП}^v_d \,\&\, A$ р. п.$] \supset$

$$\supset \exists x [x \in \text{ПСП}^v_{2^d} \,\&\, \forall y [y \in A \supset \neg x \underset{v}{\sim} y]]].$$

Теорема 3.

$\forall v \forall d [v \in O \,\&\, d \neq 0 \,\&\, 2^d \leqslant_0 v \supset \text{ПСП}^v_{2^d}$ э. н.$]$.

Теорема 4.

$\forall v \forall d [v \in O \,\&\, 3\cdot 5^d \leqslant_0 v \supset \text{ПСП}^v_{3\cdot 5^d}$ v-э. р. п.$]$ $\&\, \text{ПСП}^v_1$ v-э. р. п.

Теорема 5.

$$\forall_v \forall_x \exists y[[v \in O \,\&\, d <_0 v \,\&\, x \in \text{ПСП}_d^v] \supset [y \in \text{ПСП}_d^v \,\&\, \neg\, x =_0 y]].$$

Частный случай теоремы 5, при $d=2$ вытекает из статьи ([7]), а в статье ([8]) доказывается частный случай теоремы 3, при $d=2$.

Автор выражает благодарность И. Д. Заславскому за ценные советы.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ս. Մ. ՄԵԼԻՔՅԱՆ

Փսեդոթվերի կոնստրուկտիվ տրանսֆինիտ հիերարխիա

Ընդհանրացվում է Պսեդոթվերի հասկացությունը և տրվում նրանց դասակարգումն ըստ կոնստրուկտիվ օրդինալների։ Ստորին դասը ռացիոնալ թվերի բազմությունն է։ Սահմանային օրդինալին համապատասխանող դասի էլեմենտը նախորդ դասերից որևէ մեկի էլեմենտ է, իսկ ոչ-սահմանային օրդինալին համապատասխանող դասի էլեմենտը նախորդ դասի էլեմենտների կոնստրուկտիվ պսեդոզուգամետ հաջորդականություն է։

Ապացուցվում է՝

1. դասերը խիստ ընդլայնվում են,

2. սահմանային օրդինալին համապատասխանող դասը որոշ իմաստով կոնստրուկտիվ հաշվելի է, իսկ ոչ-սահմանային դեպքում՝ էֆեկտիվորեն ոչ-հաշվելի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Лифшиц*, О множестве нулей конструктивного степенного ряда в вещественной области, Записки научных семинаров ЛОМИ, 16, 114—125, Л., 1969. [2] *Б. А. Кушнер*, Лекции по конструктивному математическому анализу, М., «Наука», 1973 [3] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир», М., 1972 [4] *А. Н. Мальцев*, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., «Наука», 1965 [5] *С. Клини*, Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957 [6] *Н. А. Шанин*, О конструктивном понимании математических суждений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 52, 226—311, 1958. [7] *В. Г. Жарон*, Об одном аналоге теоремы Шпеккера, ДАН СССР, т. 215, № 3, 526—528, (1974). [8] *Н. В. Петри*, Эффективная неперечислимость псевдочисел, Теория алгорифмов и математическая логика, М., ВЦ АН СССР, 143—147, 1974.