

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. А. Шемян

О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 25/VI 1974)

В статье рассматривается плоская контактная задача о соударении двух твердых тел в постановке нелинейной теории ползучести или пластичности при степенном законе связи между напряжениями и деформациями и в рамках статической теории удара Г. Герца. В качестве физической модели контакта тел принимается предложенная в работах (1-3) модель, основанная на обобщенном принципе суперпозиции перемещений.

Предварительно строится замкнутое решение обычной статической контактной задачи. В отличие от указанных работ здесь это решение представляется в виде ряда по классическим многочленам Гегенбауэра, что удобно для наших целей. Затем исследуется задача о центральном ударе двух твердых тел, находящихся в условиях установившейся ползучести и изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. При некоторых конкретных формах поверхностей ударяемых тел получены основные механические характеристики теории удара Г. Герца в виде формул довольно простой аналитической структуры. Получены также числовые результаты, но только в предположении, когда одно из соударяемых тел представляет собой штамп с плоским основанием.

Отметим, что обсуждаемую нами контактную задачу можно интерпретировать также как задачу нелинейной теории упругости.

1. Пусть два первоначально соприкасающихся между собой в точке тела, находящиеся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, прижимаются одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых P перпендикулярна к оси Ox и проходит через начало координат (рис. 1).

Как известно (1-3), решение этой контактной задачи, при отсутствии тангенциальных контактных напряжений, сводится к решению следующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода

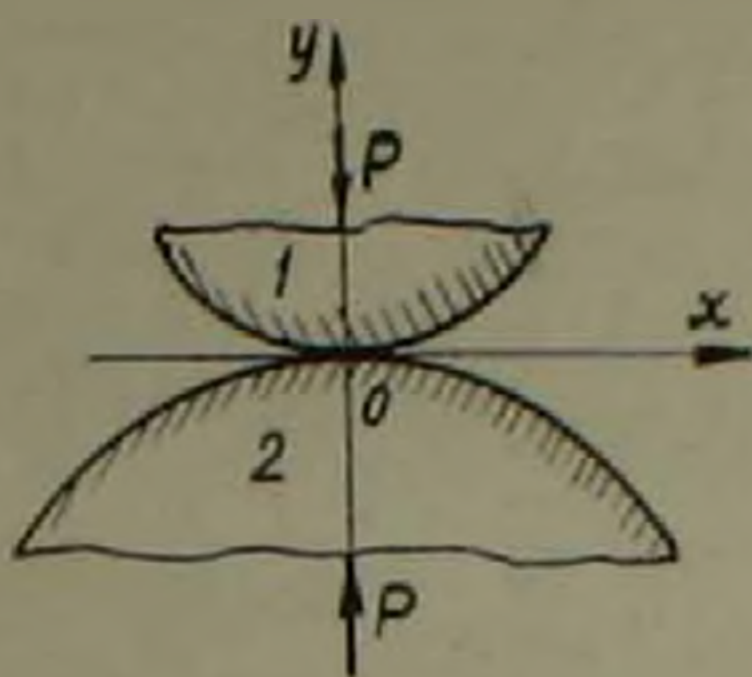


Рис. 1

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} p_0(\eta) d\eta = \frac{a^{1-\mu}}{\rho} \left| \gamma - f_0(\xi) \right|^\mu, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (1.1)$$

Здесь

$$p_0(\xi) = \frac{a}{\rho} p(a\xi), \quad \gamma = \frac{\delta}{A_1 + A_2}, \quad f_0(\xi) = \frac{f_1(a\xi) + f_2(a\xi)}{A_1 + A_2},$$

$$A_i = \frac{(2\mu - 1) \sin \pi \sqrt{2\mu - 1}/2\mu}{(1 - \mu) |K_i J(\mu)|^{1/\mu}}, \quad (i = 1, 2)$$

$$J(\mu) = 4 \left| \frac{\sqrt{2\mu - 1}}{\mu} \right|^\mu \cdot \int_0^{\pi/2} \left| \cos \frac{\sqrt{2\mu - 1}}{\mu} \eta \right|^\mu \cos \eta d\eta.$$

K_1 и K_2 — физические константы материалов первого и второго тел соответственно, $p(x)$ — нормальное контактное напряжение, подлежащее определению, a — полудлина участка контакта, μ — показатель ползучести, подчиненный у нас условиям $0,5 < \mu \leq 1$, δ — мера взаимного сближения тел, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные достаточно гладкие функции, характеризующие поверхности контактирующих тел.

При этом решение уравнения (1.1) должно удовлетворять условию равновесия

$$\int_{-1}^1 p_0(\xi) d\xi = 1. \quad (1.2)$$

Решение $p_0(\xi)$ интегрального уравнения (1.1) представим в виде

$$p_0(\xi) = (1 - \xi^2)^{-\mu/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x_n C_{2n}^*(\xi), \quad \mu = (1 - \mu)/2. \quad (1.3)$$

Здесь $C_n^*(\xi)$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(\xi) = (1 - \xi^2)^{-\mu/2}$, а $x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Далее будем пользоваться соотношением* (4)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{|\xi - \eta|^{1-\nu}} (1 - \eta^2)^{-\nu/2} C_n^\nu(\eta) d\eta = \lambda_n C_n^\nu(\xi), \quad (-1 \leq \xi \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi}{\cos \nu \pi} \frac{\Gamma(2\nu + n)}{\Gamma(2\nu)}.$$

Принимая во внимание свойство ортогональности многочленов Гегенбауэра и учитывая соотношение (1.4), после несложных выкладок получим

$$x_n = -\frac{a^{1-\nu}}{P a_{2n} \cdot \lambda_{2n}} \int_{-1}^1 |\gamma - f_0(\xi)|^\nu (1 - \xi^2)^{-\nu/2} C_{2n}^\nu(\xi) d\xi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.5)$$

где

$$a_{2n} = \frac{\pi 2^\nu \Gamma(2n + 2\nu)}{(2n)!(2n + \nu) \Gamma^2(\nu)} = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-\nu/2} |C_{2n}^\nu(\xi)|^2 d\xi.$$

Из условия (1.2) непосредственно следует, что

$$x_0 = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)}. \quad (1.6)$$

При помощи (1.5) и (1.6) получим

$$P = \frac{a^{1-\nu} \cos \nu \pi}{\pi} \int_{-1}^1 |\gamma - f_0(\xi)|^\nu (1 - \xi^2)^{-\nu/2} d\xi. \quad (1.7)$$

Формулой (1.7) устанавливается связь между силой P и сближением тел δ , когда поверхности контактирующих тел на концах участка контакта имеют угловые точки.

В случае же гладкой поверхности необходимо найти также размеры участка контакта. В этом случае будем иметь дополнительное условие, а именно: условие ограниченности давлений $p(x)$ на концах области контакта

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n C_{2n}^\nu(1) = 0. \quad (1.8)$$

После элементарных операций условие (1.8) можно привести к виду

* Это соотношение весьма элементарно получается также известными методами теории потенциала.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n)!}{\Gamma(2n+2\nu)} \int_{-1}^1 |1 - f_0(\xi)|^{\nu} (1 - \xi^2)^{-\nu/2} C_{2n}^{\nu}(\xi) d\xi = 0, \quad (1.9)$$

Рассмотрим тот частный случай, когда одно из контактирующих тел представляет собой полуплоскость, т. е. $f_2(x) \equiv 0$, а поверхность другого тела характеризуется функцией $f_1(x) = Ax^{2\alpha}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$f_0(\xi) = A_0(a\xi)^{2\alpha}, \quad A_0 = \frac{A}{A_1 + A_2}, \quad \alpha > 0 \quad (1.10)$$

и условие (1.9) даст

$$\gamma = \beta a^{2\alpha},$$

где положительный коэффициент β определяется из уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+2\nu)} \int_{-1}^1 \left| \beta - A_0 \xi^{2\alpha} \right|^{\nu} (1 - \xi^2)^{-\nu/2} C_{2n}^{\nu}(\xi) d\xi = 0.$$

В указанном частном случае связь между P и δ выражается формулой

$$P = B\delta^{\alpha}, \quad \alpha = 1 + (1 - \mu) \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right), \quad (1.11)$$

где коэффициент B можно найти из (1.7).

2. Перейдем к задаче удара и рассмотрим центральный удар двух тел, находящихся в условиях плоской деформации и установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. Исходя из основных предположений теории Г. Герца соударения упругих тел (^{5,6}), обнаруживаем, что решение этой задачи сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$M \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -P \quad (2.1)$$

при начальных условиях

$$\delta|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{t=0} = v_0. \quad (2.2)$$

где в качестве зависимости между силой P и сближением центров инерции соударяемых тел δ принимается зависимость, полученная при решении соответствующей статической контактной задачи этих тел.

Здесь $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ — приведенная масса первого и второго тел, v_0 — относительная скорость приближения центров инерции в момент соударения, t — время.

Зависимость между силой P и сближением δ , полученную выше, представим в виде

$$P = \Phi(\delta), \quad \delta = (A_1 + A_2)\gamma. \quad (2.3)$$

Умножая обе части уравнения (2.1) на $d\delta/dt$ и интегрируя в пределах от 0 до t , а затем учитывая (2.3) и начальные условия (2.2) находим

$$\frac{M}{2} \left[v_0^2 - \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 \right] = \int_0^\delta \Phi(\delta) d\delta = \Phi_1(\delta). \quad (2.4)$$

Из этой формулы вытекает, что значение $\delta_{\max}$ удовлетворяет уравнению

$$2\Phi_1(\delta_{\max}) = Mv_0^2. \quad (2.5)$$

Имея значение $\delta_{\max}$, по формуле (2.3) находим

$$P_{\max} = \Phi(\delta_{\max}). \quad (2.6)$$

Продолжительность удара определяется формулой

$$T = 2\sqrt{M} \int_0^{\delta_{\max}} \frac{d\delta}{\sqrt{Mv_0^2 - 2\Phi_1(\delta)}}. \quad (2.7)$$

В случае, когда поверхности соударяемых тел имеют форму (1.10), функция $\Phi(\delta)$ определяется формулой (1.11). Теперь, пользуясь соотношениями (2.5) — (2.7), имеем

$$\delta_{\max} = \left[\frac{(1+x)Mv_0^2}{2B} \right]^{\frac{1}{1+x}}, \quad P_{\max} = B\delta_{\max}^x, \quad T = \frac{2\delta_{\max}}{v_0} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2+x}{1+x}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+x}{2+2x}\right)}.$$

Отсюда обнаруживаем, что с уменьшением относительной скорости v_0 продолжительность удара T будет возрастать при $0 < 2x < 1$. При $2x > 1$ продолжительность удара уменьшается с уменьшением начальной скорости v_0 .

Как известно (^{5,6}), теория удара Герца применима в том случае, когда продолжительность удара весьма велика. В рассмотренной им задаче продолжительность удара возрастает с убыванием начальной скорости. В связи с этим следует отметить, что при указанной частной конфигурации соударяемых тел, когда $x = n$ ($n=1,2,3,\dots$), продолжительность упругого удара увеличивается с уменьшением начальной скорости, а при $0 < 2x < 1$, наоборот. В случае удара в постановке нелинейной теории ползучести, рассмотренной здесь, наблюдается противоположная картина.

Эти соображения наводят на мысль, что статическая теория удара Г. Герца применительно к нелинейным задачам должна уточняться*.

* Исследование этого вопроса подлежит отдельному рассмотрению и здесь не приводится.

В случае $f_0(\frac{1}{2}) = 0$, когда имеется штамп с плоским основанием, получаем

$$\delta_{max} = \left[\frac{(1+\mu)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)v_0^2MA_2}{2\sqrt{\pi}a^{1-\mu}} \right]^{\frac{1}{1+\mu}}$$

$$P_{max} = \frac{a^{1-\mu}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right)}\left(\frac{\delta_{max}}{A_2}\right)^\mu, \quad T = \frac{2\delta_{max}}{v_0} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2+\mu}{1+\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\mu}{2+2\mu}\right)}$$

3. Численные результаты получены в случае удара жесткого штампа прямолинейного основания о свинцовую ($K_2=0,17 \cdot 10^9$ кг/см²) плоскость со степенным законом упрочнения для нескольких значений параметров v_0 , M , a , μ . Ход изменения характеристических величин удара иллюстрируется на приведенных ниже таблицах.

Значения δ_{max} (с.м)

	$\mu = 0.9$			$\mu = 0.7$		
	$v_0 \left(\frac{см}{сек} \right)$					
a, M	10	100	200	10	100	200
100 $\frac{см}{10 кг}$	0.077466	0.874467	1.813916	0.013136	0.197190	0.445695
200 $\frac{см}{20 кг}$	0.107573	1.214330	2.518897	0.017473	0.262324	0.592913
500 $\frac{см}{50 кг}$	0.166036	1.874280	3.887839	0.025481	0.382556	0.864665

Значения P_{max} (10^4 кг)

	$\mu = 0.9$			$\mu = 0.7$		
	$v_0 \left(\frac{cm}{сек} \right)$					
a, M	10	100	200	10	100	200
100 c.m. 10 кг	0.244687	2.167605	4.179906	0.051402	0.342380	0.605920
200 c.m. 20 кг	0.657620	5.825645	11.233896	0.125538	0.836191	1.479832
500 c.m. 50 кг	2.429760	21.524455	41.506735	0.408711	2.722361	4.817842

Значения T (10^{-2} сек)

	$\mu = 0.9$			$\mu = 0.7$		
	$v_0 \left(\frac{\text{с.м}}{\text{сек}} \right)$					
$a, \text{ M}$	10	100	200	10	100	200
100 с.м. 10 кг	2.472685	2.791263	2.894973	0.432091	0.648702	0.733109
200 с.м. 20 кг	3.433697	3.876091	4.020185	0.574816	0.862976	0.975263
500 с.м. 50 кг	5.299806	5.982627	6.204914	0.838274	1.258569	1.422260

В заключение приношу свою признательность академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и руководство работой.

Институт механики Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ՇԵԿՈՆ

Աստիճանային օրենքով ամրապնդվող երկու պինդ մարմինների հարվածի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ դժային, հաստատված սողորի տեսության դրվածքով երկու պինդ մարմինների հարվածի կոնտակտային խնդիրը: Դա րատ 2. Հերցի հարվածի տեսության բերվում է երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման, որը լուծելու համար օգտագործվում է այդ նույն մարմինների ստատիկական կոնտակտային խնդրի լուծումը: Հարվածվող մարմինների մակերևույթների կոնկրետ տեսքերի համար ստացված են հարվածի տեսության հիմնական մեխանիկական բնութագրիչները: Ստացված են նաև թվային արդյունքներն այն դեպքի համար, երբ հարվածվող մարմիններից մեկն աստիճանային օրենքով ամրապնդվող կիսահարթություն է, իսկ մյուսը հարթ հիմքով կոշտ գրոշմ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 23, вып. 5 (1959). ² Н. Х. Арутюнян, «Известия АН Арм. ССР», серия физ.-мат. наук, вып. 2 (1959). ³ Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). ⁴ Г. Я. Полов, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). ⁵ В. Гольдсмит, Удар, Строиниздат, М., 1965. ⁶ Н. А. Кильчевский, Теория соударений твердых тел, Изд «Наукова думка», Киев, 1969.