

УДК 519.210

МАТЕМАТИКА

С. А. Орлов

О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических J -сжимающих матриц-функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/VI 1974)

При решении многих задач анализа, например, исследовании канонических дифференциальных систем, зависящих от спектрального параметра линейно, либо дробно-линейно, интерполяционных задач (проблема Неванлинна—Пика) и т. д. ⁽¹⁾, возникают аналогичные ситуации следующего характера. По данным задачи, при фиксированном значении параметра b (фиксированном конце интервала $0 \leq x \leq b$ для дифференциальных систем, либо фиксированном $b = n$ для дискретных задач) определяется аналитическая, обратимая, J -нерастягивающая матрица-функция $w(b, \lambda)$ с монотонно растущей при $b \rightarrow \infty$ J -формой $\Gamma(b, \lambda) = J - w(b, \lambda)Jw^*(b, \lambda)$ ($J^* = J, J^2 = I$). Такое семейство $w(b, \lambda)$ мы будем называть монотонным.

После того, как получено $w(b, \lambda)$, возникают проблемы:

I. Отыскать подпространство максимальной размерности, на котором сходится при $b \rightarrow \infty$ квадратичная форма $f(\lambda)\Gamma(b, \lambda)f^*(\lambda)$ и доказать, что размерность этого подпространства не зависит от λ . В частности, установить критерий сходимости $w(b, \lambda)$ при $b \rightarrow \infty$, если $\Gamma(b, \lambda)$ ограничена.

II. Рассматриваются дробно-линейные преобразования, коэффициенты которого равны блокам матрицы $w(b, \lambda)$. Например, $J = J_{pq} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$

$$w(b, \lambda) = \|w_{jk}\|_{j,k=1}^2; \quad w_1(b, \lambda) = Jw^{-1}(b, \lambda)J = \|\bar{w}_{jk}\|_{j,k=1}^2$$

$$v_{qp}(\lambda) = (v_{qp} \bar{w}_{12} + \bar{w}_{22})^{-1} (v_{qp} \bar{w}_{11} + \bar{w}_{21}) = (w_{21} + w_{22}v_{qp})(w_{11} + w_{12}v_{qp})^{-1}. \quad (1)$$

При фиксированном λ это дробно-линейное преобразование отображает единичный замкнутый матричный круг $v_{qp}^*(\lambda)v_{qp}(\lambda) \leq I_p$ в матричный круг, принадлежащий единичному матричному кругу.

Из монотонности следует, что круги гнездятся. Пересечение кругов при $0 < b < \infty$ есть предельный матричный круг

$$v_{qp}(\lambda) = c(\lambda) + r_g(\lambda)v, \quad r_s(\lambda); \quad v^* v \leq I_p, \quad (2)$$

где $c(\lambda)$ — центр, $r_g(\lambda)$ и $r_s(\lambda)$ — радиусы предельного круга, $r_g(\lambda)$ — матрица порядка $q \times q$, $r_s(\lambda)$ — порядка $p \times p$.

Какие суждения могут быть высказаны об инвариантности рангов радиусов предельного матричного круга относительно λ ?

Аналогично при $J = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{pmatrix}$ преобразование

$$\Omega_n(\lambda) = (\bar{w}_{11} + \omega \bar{w}_{21})^{-1} (\bar{w}_{12} + \omega \bar{w}_{22}) = (w_{21} + w_{22}\omega)(w_{11} + w_{12}\omega)^{-1} \quad (3)$$

при фиксированном λ отображает верхнюю замкнутую матричную полуплоскость $\text{Im} \omega(\lambda) = \frac{1}{2i} (\omega(\lambda) - \omega^*(\lambda)) \geq 0$ в матричный круг, принадле-

жащий верхней матричной полуплоскости. Круги гнездятся, их пересечение есть предельный матричный круг вида (2), где $r_g(\lambda)$ и $r_s(\lambda)$ квадратные матрицы порядка n . И здесь возникает тот же вопрос о зависимости рангов матриц-функций $r_g(\lambda)$ и $r_s(\lambda)$ от λ .

Проблема об инвариантности рангов радиусов предельного матричного круга в общей постановке впервые была поставлена М. Г. Крейном (2).

В настоящей работе дается решение этих проблем, при этом мы используем только такие свойства семейства $w(b, \lambda)$: 1) аналитичность, 2) обратимость, 3) J -сжимаемость, 4) монотонность $\Gamma(b, \lambda)$ относительно b .

Итак, будем рассматривать в области $G = \{\lambda, \text{Im} \lambda > 0\}$ семейство мероморфных, обратимых ($\det w(b, \lambda) \neq 0$) матриц-функций $w(b, \lambda)$ ($0 < b < \infty$) удовлетворяющее условиям:

$$1) \quad \Gamma(b, \lambda) = J - w(b, \lambda) J w^*(b, \lambda) > 0; \quad J^* = J; \quad J^2 = I$$

$$2) \quad \text{при } 0 < b_1 < b_2 < \infty \quad \Gamma(b_1, \lambda) \leq \Gamma(b_2, \lambda) \quad (\text{монотонность}) \quad (4)$$

Из монотонности следует, что семейство мультипликативно в том смысле, что при $b_1 < b_2$ $w(b_2, \lambda) = w(b_1, \lambda) w_2(\lambda)$, где $J - w_2(\lambda) J w_2^*(\lambda) \geq 0$. Положим $w_1(b, \lambda) J w^{-1}(b, \lambda) J$, тогда $\Gamma_1(b, \lambda) = w_1^*(b, \lambda) J w_1(b, \lambda) - J > 0$. Из соотношения $\Gamma^{-1}(b, \lambda) - J = \Gamma_1^{-1}(b, \lambda)$ следует, что и $\Gamma_1(b, \lambda)$ монотонно возрастает вместе с b . Но тогда в каждой точке регулярности $w(b, \lambda)$ и $w^{-1}(b, \lambda)$ существуют пределы

$$R(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma^{-1/2}(b, \lambda); \quad R_1(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma_1^{-1/2}(b, \lambda) \quad \text{и} \quad R^2(\lambda) - R_1^2(\lambda) = J. \quad (5)$$

Легко показать, что матрицы $\Gamma^{-1}(b, \lambda)$ и $\Gamma_1^{-1}(b, \lambda)$ могут быть доопределены по непрерывности и в полюсах $w(b, \lambda)$ и $w^{-1}(b, \lambda)$, после чего они будут иметь пределы при $b \rightarrow \infty$.

Таким образом в каждой точке $\lambda \in G$ имеет место (5). Если

$J = u J_{pq} u^*$, $uu^* = I_p$, q , то из (5) легко следует, что ранги $m(i)$ и $m_1(i)$ матриц $R^2(i)$ и $R_1^2(i)$ удовлетворяют неравенствам $q \leq m(i) \leq p+q$; $p \leq m_1(i) \leq p+q$.

Ответ на первый вопрос проблемы 1 дает следующая

Лемма. Если $\Gamma(b, \lambda) > 0$ и возрастает вместе с b , $R(i) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma^{-1/2}(b, \lambda)$.

$P(i)$ — ортопроектор на область значения $R(i)$, то:

1) $\lim_{b \rightarrow \infty} R(i) \Gamma^{1/2}(b, \lambda) = P(i)$; 2) квадратичная форма $f^* \Gamma^{1/2}(b, \lambda) f$ при $b \rightarrow \infty$ сходится на векторах из области значения $R(i)$ и только на них.

Далее, если $E(b)$ множество полюсов $w(b, \lambda)$, то при $b_1 < b_2$ $E(b_1) \subseteq E(b_2)$. Пусть $E = \bigcup_{0 < b < \infty} E(b)$, а E_1 — такое же множество для $w^{-1}(b, \lambda)$.

Заметим, что при $J = I$ E — пусто, а E_1 может быть любым счетным множеством. При $J = -I$ пустым будет E_1 . В остальных случаях как E так и E_1 могут быть произвольными счетными множествами. Множество $G - \bar{E}$ может распадаться на связные компоненты и даже быть пустым.

Основная теорема. Если $w(b, \lambda)$ монотонное семейство, то ранги матриц-функций $R^2(i)$ и $R_1^2(i)$ не зависят от i для $i \in G - E$ и $i \in G - E_1$, соответственно. Могут лишь существовать множества $E^{(0)} = \{i_{nk}\} \subseteq E$; $E_1^{(0)} = \{i_{ms}\} \subseteq E_1$, удовлетворяющие условию Бляшке*, в которых ранги $R^2(i)$ и $R_1^2(i)$ понижаются.

Из основной теоремы следует, что, в частности, при $J = I$ матрица-функция $H(i) = \lim_{b \rightarrow \infty} w(b, \lambda) w^*(b, \lambda)$ имеет ранг, не зависящий от i для $i \in G - E_1$, где E_1 — множество нулей $\det w(b, \lambda)$ при всех значениях параметра b ($0 < b < \infty$).

Опираясь на основную теорему, мы устанавливаем следующий критерий сходимости монотонного семейства.

Если $w(b, \lambda)$ монотонное семейство и в точке $i_0 \in (E + E_1)$ существует $\lim_{b \rightarrow \infty} w(b, i_0) = w_0$, $\text{ранг } w_0 = m$, то:

1) Множество E удовлетворяет условию Бляшке.

2) В каждой точке $i \in G - E$ существует $\lim_{b \rightarrow \infty} w(b, i) = w(i)$ и эта

сходимость равномерная внутри $G - E$.

3) $w(i)$ — мероморфна в G и ее множество полюсов совпадает с E .

4) $\text{Ранг } w(i) = m$ для $i \in G - (E + E_1)$.

Следствие: Для того, чтобы нормированное в точке $i_0 \in E + E_1$ к J -модулю монотонное семейство $w(b, \lambda)$ при $b \rightarrow \infty$ сходилось к мероморфной функции достаточно, чтобы $\Gamma(b, \lambda)$ была ограничена в одной точке.

Итак, лемма, основная теорема и критерий сходимости решают проблему 1.

$$\sum \text{Im} \left(\frac{-1}{i_{nk}} \right) < \infty$$

Решение проблемы II следует из основной теоремы. Нами установлено, что как для $J = J_{pq}$, так и для $J = J_2$ радиусы предельного круга в каждой точке G удовлетворяют условию:

$$\operatorname{def} r_g(\lambda) = \operatorname{def} R_1^2(\lambda); \quad \operatorname{def} r_d(\lambda) = \operatorname{def} R^2(\lambda).$$

Следовательно, ранги $r_g(\lambda)$ и $r_d(\lambda)$ ведут себя так, как ранги $R_1^2(\lambda)$ и $R^2(\lambda)$. В частности, ранги $r_g(\lambda)$ и $r_d(\lambda)$ не зависят от λ для $\lambda \in G - E_1$ и $\lambda \in G - E$ соответственно.

Если ранг $R_1^2(\lambda) = p$, то есть минимален, то $r_g(\lambda) = 0$ и, следовательно имеет место случай „предельной точки“. Аналогично, если ранг $R^2(\lambda) = q$, то $r_d(\lambda) = 0$.

Если $r_d(\lambda)$ — обратим, то $r^2(\lambda)$ обратима, следовательно, $\Gamma(b, \lambda)$ — ограничена и нормированное семейство $\omega(b, \lambda)$ при $b \rightarrow \infty$ сходится к мероморфной функции $\omega(\lambda)$.

Аналогично, если $r_g(\lambda)$ — обратим, то $\omega_1(b, \lambda)$ сходится к мероморфной функции $\omega_1(\lambda)$.

При обратимости одного из радиусов, независимо от характера вырождения другого радиуса, мы получаем описание предельного матричного круга с помощью дробно-линейного преобразования того же вида, коэффициенты которого равны блокам предельной матрицы $\omega(\lambda)$, либо $\omega_1(\lambda)$.

Как установлено в (3), матрица $\omega(b, \lambda)$ допускает представление

$$\omega(b, \lambda) = B_-(b, \lambda) B_0(b, \lambda) \omega_0(b, \lambda), \quad (6)$$

где $B_-(b, \lambda)$ — бесконечное произведение элементарных множителей Бляшке — Потапова по полюсам $\omega(b, \lambda)$ в G , $B_0(b, \lambda)$ такое же произведение по полюсам матрицы $[B_-^{-1}(b, \lambda) \omega(b, \lambda)]^{-1}$ в G , а $\omega_0(b, \lambda)$ — регулярна и регулярно обратима в G .

Основная теорема и критерий сходимости установлены для общего случая (4). В частности, если $\omega(b, \lambda)$ регулярна и регулярно обратима в G , то ранги $R^2(\lambda)$ и $R_1^2(\lambda)$ не зависят от λ всюду в G .

Из леммы и основной теоремы вытекает для дифференциальных систем:

Пусть $H(t, \lambda)$ квадратная матрица порядка $(p+q)$ и удовлетворяет условиям:

- а) при любом фиксированном λ ($\operatorname{Im} \lambda > 0$) $H(t, \lambda)$ локально суммируема,
- в) при любом фиксированном t ($0 \leq t < \infty$) $H(t, \lambda)$ — аналитична и

$$\operatorname{Im} H(t, \lambda) \geq 0; \quad \int_0^b \operatorname{Im} H(t, \lambda) dt > 0 \quad (b > b_0).$$

Например,

$$H(t, \lambda) = A(t) + \lambda H_0(t) + \sum_k \frac{H_k(t)}{t_k - \lambda}; \quad A^*(t) = A(t); \quad H_k(t) \geq 0; \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\bar{t}_k = t_k.$$

Пусть $w(t, \lambda)$ и $w_1(t, \lambda)$ — решения задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dw(t, \lambda)}{dt} = i w(t, \lambda) H(t, \lambda) J; \\ w(0, \lambda) = I_{p+q} \end{cases}; \begin{cases} \frac{dw_1(t, \lambda)}{dt} = -i J H(t, \lambda) w_1(t, \lambda); \\ w_1(0, \lambda) = I_{p+q} \end{cases} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_q & 0 \end{pmatrix}; \quad w w^* = I_{p+q}$$

$$\text{Здесь } \Gamma(b, \lambda) = I - w(b, \lambda) J w^*(b, \lambda) = 2 \int_0^b w(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) w^*(t, \lambda) dt$$

$$w_1(t, \lambda) = J w^{-1}(t, \lambda) J; \quad \Gamma_1(b, \lambda) = w_1^*(b, \lambda) J w_1(b, \lambda) - I =$$

$$= 2 \int_0^b w_1^*(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) w_1(t, \lambda) dt$$

Максимальное число линейно-независимых решений систем

$$\frac{dY(t, \lambda)}{dt} = i Y(t, \lambda) H(t, \lambda) J; \quad \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = -i J H(t, \lambda) x(t, \lambda) \quad (7)$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty Y(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) Y^*(t, \lambda) dt < \infty; \quad \int_0^\infty x^*(t, \lambda) \operatorname{Im} H(t, \lambda) x(t, \lambda) dt < \infty \quad (8)$$

не зависит от λ ($\operatorname{Im} \lambda > 0$) и равно, соответственно, рангам матриц

$$R^2(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma^{-1}(b, \lambda); \quad R_1^2(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma_1^{-1}(b, \lambda).$$

Можно показать, что для любых двух чисел m и m_1 , удовлетворяющих, независимо друг от друга, неравенствам $q \leq m \leq p+q$; $p \leq m_1 \leq p+q$ существует каноническая система ($H(t, \lambda) = i H_0(t)$), для которой $\operatorname{rang} R^2(\lambda) = m$, $\operatorname{rang} R_1^2(\lambda) = m_1$. Заметим, что в отличие от дифференциального уравнения, для канонической системы число m может равняться $p+q$, то есть, все решения системы

$$\frac{dY(t, \lambda)}{dt} = i Y(t, \lambda) H(t) J \text{ удовлетворяют условию}$$

$$\int_0^\infty Y(t, \lambda) H(t) Y^*(t, \lambda) dt < \infty$$

в то время как $\operatorname{rang} R_1^2 = m_1$ может быть любым числом, удовлетворяющим неравенству $p \leq m_1 \leq p+q$.

Наконец, основная теорема и критерий сходимости могут быть применены и к произведению элементарных множителей Бляшке-Потапова.

Например, если $J = J_0$, $w(n, \lambda) = b_1(\lambda, \lambda_1) b_2(\lambda, \lambda_2) \dots b_n(\lambda, \lambda_n)$, где $b_k(\lambda, \lambda_k)$ элементарный множитель полного ранга с полюсом в точке λ_k ($\operatorname{Im} \lambda_k > 0$), то для этого семейства E — пусто, $E_1 = \{\lambda_n\}$ $\operatorname{rang} r_n(\lambda)$

— не зависит от λ всюду в G , ранг $r_g(\lambda)$ не зависит от λ в $G - E_1$ и $r_g(\lambda_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Как показал В. П. Потапов, такому семейству отвечает матричная проблема Неванлинна—Пика с точками интерполяции λ_k (^{4,5}).

Одесский педагогический институт им. К. Д. Ушинского

И. И. ОРЕЛОВ

Անալիտիկ J-սելվող մատրից-ֆունկցիաների մոնոտոն ընտանիքների
զուգամիտության և տարամիտության բնույթի մասին

$G_\lambda = \{\lambda; \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ տիրույթում դիտարկվում է (4) պայմանին բավարարող հակադարձելի մերոմորֆ $w(b, \lambda)$ ($0 < q < \infty$) մատրից-ֆունկցիաների ընտանիք:

Արդարև ընտանիքի համար ապացուցված է.

1) $R^2(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \Gamma^{-1}(b, \lambda)$ մատրից-ֆունկցիայի λ -ի նկատմամբ ունդի ինվարիանտությունը, 2) $f(\lambda) \Gamma(b, \lambda) f^*(\lambda)$ քառակուսային ֆորմը $b \rightarrow \infty$ դեպքում զուգամիտում է $R(\lambda)$ -ի արժեքների տիրույթին պատկանող վեկտորների և միայն դրանց վրա, 3) $w(b, \lambda)$ -ի $b \rightarrow \infty$ դեպքում զուգամիտության հարուսնիչները, 4) $w(b, \lambda)$ մատրիցի բլոկներին հավասար գործակիցներ ունեցող կոտորակա-քծային ձևափոխությունով առաջացված Վեյլի մատրիցային շրջանների $r_g(\lambda)$ և $r_*(\lambda)$ սահմանային շառավիղների ունդերի ինվարիանտությունը λ -ի նկատմամբ, 5) $R^2(\lambda)$ մատրիցի ունդի ինվարիանտության մասին թեորեմը կիրառվում է դիֆերենցիալ սիստեմների նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Ф. В. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968. ² Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. I, Киев, 1969, стр. 332—347. ³ В. П. Потапов, Труды ММО 4, 125—236, 1965. ⁴ Н. В. Ковалишина, Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Сентябрь 1971 г., Харьков, стр. 97—98. ⁵ В. П. Потапов, Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного, 179—181, Харьков, 1971.