ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIX 1974 3

УДК 513838

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О геодезических три-тканях на двумерном многообразии аффинной связности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 25/IV 1974)

1. Пусть в аналитическом многообразии X_2 задана три-ткань, т. е. семейства гладких линий при условии, что через каждую точку проходит, не касаясь друг-друга по одной линии из каждого семейства и две линии различных семейств имеют не более одной общей точки. Три- ткань на X_2 определяется уравнениями

$$\sigma^\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \tag{1}$$

где σ^α —форма Пфаффа, удовлетворяющая условию

$$\sigma^0 + \sigma^1 + \sigma^2 = 0. \tag{2}$$

Следуя В. Бляшке ([1]), полагаем

$$d\sigma^\alpha = h^\alpha \Omega, \tag{3}$$

где

$$\Omega = \sigma^0 \wedge \sigma^1 = \sigma^1 \wedge \sigma^2 = \sigma^2 \wedge \sigma^0 \tag{4}$$

—поверхностный элемент ткани. Образуем форму связности

$$\gamma = h^1\sigma^0 - h^0\sigma^1 = h^0\sigma^2 - h^2\sigma^0 = h^1\sigma^2 - h^2\sigma^1.$$

Легко видеть, что

$$d\sigma^\alpha = \gamma \wedge \sigma^\alpha. \tag{5}$$

Проложая последние уревнения получим

$$d\gamma = K\Omega, \tag{6}$$

где K—кривизна ткани ([1]).

2. Пусть задано двумерное пространство аффинной связности A_2 без кручения. Структурные уравнения такого пространства как известно ([2]) имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{7}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k = R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

где ω^i —линейно независимые формы Пфаффа, а R^i_{jkl} тензор кривизны этой связности.

Сравнивая соотношения (3) и (6) и полагая $\omega^1=\sigma^0$ $\omega^2=\sigma^1$ мы видим, что форма

$$\omega^i_j = -\delta^i_j \gamma \tag{8}$$

определяет на ткани аффинную связность без кручения. Эту связность назовем присоединенной аффинной связностью ткани. Подставляя эти значения форм ω^i_j в (7), используя уравнения (4) и учитывая, что

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \omega^i \wedge \omega^j,$$

где $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — основной бивектор многообразия X_2 ([3]), получаем

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{2} K \varepsilon_{kl} \delta^i_j. \tag{9}$$

Это соотношение связывает тензор кривизны присоединенной аффинной связности, определяемой тканью с кривизной этой ткани.

Найдем тензор Риччи присоединенной связности

$$R_{ij} = \frac{1}{2} K \varepsilon_{ij}. \tag{10}$$

Последнее соотношение показывает, что тензор Риччи присоединенной аффинной связности кососимметричен т. е. эта связность будет квазиэвклидовой ([3]).

Мы приходим к теореме

Теорема 1. *Форма связности γ три-ткани определяет на многообразии X_2 квазиэвклидовую аффинную связность без кручения.*

Заметим, что если три-ткань на X_2 является шестиугольной, т. е. $K=0$, то $R_{ij}=0$ и рассматриваемая аффинная связность будет эвклидовой.

Легко видеть, что линии всех трех семейств рассматриваемой ткани будут геодезическими линиями присоединенной аффинной связности.

Поставим следующую задачу: при каком условии линии три-ткани (1) будут геодезическими линиями произвольной двумерной афинной связности без кручения, определяемой на многообразии X_2 структурными уравнениями (7).

Для форм σ^α, определяющих три-ткань на многообразии X_2 имеем

$$\sigma^\alpha = \lambda^\alpha_i \omega^i \tag{11}$$

Из (2) следует, что

$$\lambda^0_i + \lambda^1_i + \lambda^2_i = 0. \tag{12}$$

Используя (4) и (12) находим

$$\Omega = \lambda\, \omega^1 \wedge \omega^2,$$

где

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda^0_1 & \lambda^1_1 \\ \lambda^0_2 & \lambda^1_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^2_1 \\ \lambda^1_2 & \lambda^2_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^0_1 \\ \lambda^2_2 & \lambda^0_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{13}$$

Внешнее дифференцирование уравнения (11) с использованием (6) дает

$$d\sigma^{a} = (d\lambda_{i}^{a} - \lambda_{j}^{a}\omega_{i}^{j}) \wedge \omega^{i}. \tag{14}$$

С другой стороны

$$d\sigma^{a} = \gamma \wedge \sigma^{a} = \lambda_{i}^{a}\gamma \wedge \omega^{i}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$(d\lambda_{i}^{a} - \lambda_{j}^{a}\omega_{i}^{j} - \lambda_{i}^{a}\gamma) \wedge \omega^{i} = 0 \tag{16}$$

Откуда по лемме Э. Картана получим

$$d\lambda_{i}^{a} - \lambda_{j}^{a}\omega_{i}^{j} - \lambda_{i}^{a}\gamma = \lambda_{ij}^{a}\omega^{j} \tag{17}$$

При этом

$$\lambda_{ij}^{a} = \lambda_{ji}^{a}, \qquad \lambda_{ij}^{0} + \lambda_{ij}^{1} + \lambda_{ij}^{2} = 0. \tag{18}$$

Продолжая уравнения (17) и учитывая (7) находим

$$(\nabla\lambda_{ij}^{a} - \lambda_{ij}^{a}\gamma) \wedge \omega^{j} + (\lambda_{l}^{a}R_{ijk}^{l} + \frac{1}{2}\lambda K\lambda_{i}^{a}\varepsilon_{jk})\omega^{j} \wedge \omega^{k} = 0, \tag{19}$$

где как обычно,

$$\nabla\lambda_{ij}^{a} = d\lambda_{ij}^{a} - \lambda_{ik}^{a}\omega_{j}^{k} - \lambda_{kj}^{a}\omega_{i}^{k}.$$

Найдем условие, при котором данная ткань будет геодезической.

Уравнение геодезической линии, как известно [2], имеет вид

$$d\omega^{i} + \omega^{j}\omega_{j}^{i} = \Theta\omega^{i}, \tag{20}$$

где d — символ обычного, а не внешнего дифференцирования. Если линии ткани определяемые уравнениями

$$\sigma^{a} = \lambda_{i}^{a}\omega^{i} = 0 \tag{21}$$

являются геодезическими линиями, то для них выполняется условие,

$$\lambda_{ij}^{a}\omega^{i}\omega^{j} = 0,$$

которое получается при дифференцировании уравнений (21) в силу (20) и (17).

Из линии, определяемой уравнением (21)

$$\omega^{i} = \lambda_{a}^{i}\varphi,$$

где $\lambda_{a}^{i} = \varepsilon^{ij}\lambda_{j}^{a}$ и φ — некоторая форма Пфаффа. Поэтому если линия ткани определяется уравнением (21), является геодезической на многообразии A_2, то

$$\lambda_{ij}^{a}\lambda_{a}^{i}\lambda_{a}^{j} = 0, \tag{22}$$

где по a суммирования нет.

Легко доказать и достаточность этого условия для геодезичности линии, определяемой уравнением (21). Действительно, дифференцируя (21) и используя (17) и (22) получаем

$$\lambda^*_i(d\omega^i + \omega^j\omega^i_j - \gamma\omega^i) = 0,$$

откуда следует, что на линии (21) выполняются (20) т. е. она является геодезической. Получили следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы три-ткань была геодезической на многообразии A_2 необходимо и достаточно, чтобы для всех линий три-ткани выполнялось уравнение (22).*

Исследуем теперь, какой вид имеют тензоры λ^*_{ij} для геодезических тканей. Уравнение (22) показывает, что вектор λ^*_i является корнем уравнения

$$\lambda^*_{ij}x^i x^j = 0.$$

Поэтому

$$\lambda^*_{ij}x^i x^j = (p^*_i x^i)(\lambda^*_j x^j).$$

Отсюда следует, что

$$\lambda^*_{ij} = p^*_{(i}\lambda^*_{j)}, \tag{23}$$

где p^*_i — некоторый ковариантный вектор. Так как тензоры λ^*_{ij} удовлетворяют соотношениям $\lambda^0_{ij} + \lambda^1_{ij} + \lambda^2_{ij} = 0$, то векторы p^*_i должны быть связаны условиями

$$p^0_{(i}\lambda^0_{j)} + p^1_{(i}\lambda^1_{j)} + p^2_{(i}\lambda^2_{j)} = 0.$$

Вносяя сюда $\lambda^0_j = -\lambda^1_j - \lambda^2_j$, получаем

$$q^1_{(i}\lambda^1_{j)} + q^2_{(i}\lambda^2_{j)} = 0, \tag{24}$$

где обозначены $q^1_i = p^1_i - p^0_i$, $q^2_i = p^2_i - p^0_i$.

Система (24) содержит три однородных уравнения для определения четырех неизвестных величины q^1_i, q^2_i. Решая эту систему получаем

$$q^1_i = \lambda^2_i q, \quad q^2_i = -\lambda^1_i q,$$

где q — параметр.
Полагая $p^0_i = p_i$, находим

$$p^1_i = p_i + \lambda^2_i q, \quad p^2_i = p_i - \lambda^1_i q$$

Вносяя эти выражения для координат векторов p^*_i в соотношения (23) находим, что

$$\lambda^0_{ij} = p_{(i}\lambda^0_{j)},$$

$$\lambda^1_{ij} = p_{(i}\lambda^1_{j)} + 2q\lambda^1_{(i}\lambda^2_{j)}$$

$$\lambda^2_{ij} = p_{(i}\lambda^2_{j)} - 2q\lambda^1_{(i}\lambda^2_{j)}$$

Последние формулы дают наиболее общие выражения для тензоров λ^*_{ij} геодезической три-ткани.

Выражаю искреннюю благадарность М. А Акивису за постановку задачи и полез ые замечания.

Ереванский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՋՅԱՆ

Դեզարգյան եռ-հյուսվածքը երկչափ աֆինական կապակցությամբ բազմաձևությունում

Այս աշխատանքում դիտարկվում է եռ-հյուսվածքն անալիտիկ բազմաձևությունում X_2։ Ապացուցվում է, որ բնական աֆինական կապակցությունը, որը ինդուկցվում է այդ հյուսվածքին, կլինի քվազիէվկլիդյան կապակցություն առանց ոլորման։ Այնուհետև ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում տված եռ-հյուսվածքը կլինի դեզարգիական եռ-հյուսվածք ցանկացած աֆինական կապակցության X_2-ում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Бляшке*, Введение в геометрию тканей. Физматгиз, М., 1959. [2] *Э. Картан*, Пространства аффинной проективной конформной связности. Изд. КГУ, Казань, 1962. [3] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, М., 1950.