ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 3

УДК 519.210

МАТЕМАТИКА

И. В. Ковалишина

J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/IV 1974)

1°. Заданы $n+1$ квадратных матриц m-го порядка $C_0, C_1, \ldots, C_n$; требуется: a) найти необходимые и достаточные условия того, что $C_0, C_1, \ldots, C_n$ являются первыми коэффициентами разложения в ряд матрицы-функции класса Каратеодори C $\left(\dfrac{F(\zeta)+F^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta}\geqslant 0\right)$

$$F(\zeta)=C_0+C_1\zeta+\ldots+C_n\zeta^n+\ldots \tag{1}$$

b) описать все матрицы-функции этого класса с такими первыми коэффициентами.

Теорема 1: *Для того, чтобы матрица-функция $F(\zeta)$ была решением поставленной задачи, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла основному матричному неравенству*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} C_0+C_0^* & C_1^* & \ldots & C_n & \frac{1}{\zeta}\,|F(\zeta)-C_0| \\ C_1 & C_0+C_0^* & \ldots & C_{n-1} & \frac{1}{\zeta^2}\,|F(\zeta)-(C_0+C_1\zeta)| \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_n & C_{n-1} & \ldots & C_0+C_0^* & \frac{1}{\zeta^{n+1}}\,|F(\zeta)-(C_0+C_1\zeta+\ldots+C_n\zeta^n)| \\ \hline & * & & & \dfrac{F(\zeta)+F^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta} \end{array}\right]\geqslant 0 \tag{2}$$

Последнее неравенство получается путем разумного перехода к пределу в известном неравенстве Шварца—Пика для функций класса Каратеодори:

$$\left\|\frac{F(\zeta_j)+F^*(\zeta_k)}{1-\zeta_j\bar\zeta_k}\right\|_{j,k=1}^{n}\geqslant 0 \tag{3}$$

Следующий этап исследования заключается в решении неравенства (2). По сравнению с проблемой Неванлинны — Пика ([1]) решение этой задачи потребовало значительных усилий. Вместо группового множителя с простыми полюсами в узлах интерполяции, здесь возникает множитель с полюсом кратности $n+1$ в точке $\zeta=\infty$, структура которого намного сложнее ([2]).

Будем считать, что блок

$$A=\begin{bmatrix} C_0+C_0^* & C_1^* & \ldots & C_n^* \\ C_1 & C_0+C_0^* & \ldots & C_{n-1}^* \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_n & C_{n-1} & \ldots & C_0+C_0^* \end{bmatrix}$$

неособенный. Обозначим $\|h_{jk}\|_{j,k=1}^{n+1}=A^{-1}$, $J_1=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 2: *Общее решение основного матричного неравенства $F(\zeta)$ представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной матрицы-функции $f(\zeta)$ класса C*

$$F(\zeta)=[a(\zeta)f(\zeta)+b(\zeta)]\,[c(\zeta)f(\zeta)+d(\zeta)]^{-1},$$

матрица коэффициентов которого

$$B(\zeta)=\begin{vmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}+$$

$$+(1-\zeta)\sum_{k=1}^{n+1}\zeta^{k-1}\left[\begin{array}{c|c} -\sum\limits_{l=1}^{n+1}\sum\limits_{s=k}^{n+1} C_{s-k}h_{sl} & \sum\limits_{l=1}^{n+1}\sum\limits_{j=l}^{n+1}\sum\limits_{s=k}^{n+1} C^*_{s-k}h_{sj}C_{j-l} \\ \hline \sum\limits_{l=1}^{n+1} h_{kl} & -\sum\limits_{l=1}^{n+1}\sum\limits_{j=l}^{n+1} h_{kj}C_{j-l} \end{array}\right] \tag{4}$$

является J_1-растягивающей в единичном круге, J_1-унитарной на его границе матрицей-функцией с полюсом порядка $n+1$ в точке $\zeta=\infty$.

Возможен и другой подход к решению этой задачи. Рассмотрим матрицу-функцию вида

$$D_1(\zeta)=I+(1-\zeta)Q_1=\begin{pmatrix} a_1(\zeta) & b_1(\zeta) \\ c_1(\zeta) & d_1(\zeta) \end{pmatrix},$$

$$Q_1=\begin{vmatrix} -C_0^*(C_0+C_0^*)^{-1} & C_0^*(C_0+C_0^*)^{-1}C_0 \\ (C_0+C_0^*)^{-1} & -(C_0+C_0^*)^{-1}C_0 \end{vmatrix},\quad Q_1^*=-Q_1,\ Q_1J_1\geq 0 -$$

так называемый двучленный элементарный множитель, то есть матрицу-функцию, имеющую простой полюс в точке $\zeta=\infty$, J_1—растягивающую в круге $|\zeta|<1$ и J_1—унитарную на его границе. Дробно-линейное преобразование

$$F(\zeta) = [a_1(\zeta)f_1(\zeta) + b_1(\zeta)][c_1(\zeta)f_1(\zeta) + d_1(\zeta)]^{-1} = D_1(\zeta)[f_1(\zeta)],$$

где $f_1(\zeta)$ – произвольная функция класса C, дает на выходе матрицу-функцию $F(\zeta)$ с заданным свободным членом разложения

$$F(\zeta) = C_0 + \ldots$$

Если теперь искать матрицу-функцию $F(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + \ldots$ с двумя известными коэффициентами ряда, то разложение в ряд параметра $f_1(\zeta) = C_0^{(2)} + \ldots$ должно иметь вполне определенный свободный член $C_0^{(2)}$, легко выражающийся через C_0, C_1. Но тогда

$$f_1(\zeta) = [a_2(\zeta)f_2(\zeta) + b_2(\zeta)][c_2(\zeta)f_2(\zeta) + d_2(\zeta)]^{-1} = D_2(\zeta)[f_2(\zeta)],$$

где $f_2(\zeta) \in C$

$$D_2(\zeta) = I + (1-\zeta)Q_2, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -C_0^{*(2)}(C_0^{(2)} + C_0^{*(2)})^{-1} & C_0^{*(2)}(C_0^{(2)} + C_0^{*(2)})^{-1}C_0^{(2)} \\ (C_0^{(2)} + C_0^{*(2)})^{-1} & -(C_0^{(2)} + C_0^{*(2)})^{-1}C_0^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Суперпозиция дробно-линейных преобразований

$$F(\zeta) = D_1(\zeta)[D_2(\zeta)[f_2(\zeta)]]$$

имеет матрицу коэффициентов $D_1(\zeta)D_2(\zeta)$ и дает общий вид функций класса C с двумя заданными коэффициентами степенного ряда.

Продолжая этот процесс*, получим, что задаче Каратеодори соответствует конечное произведение двучленных множителей

$$\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{n+1}} D_j(\zeta) = \overset{\frown}{\prod_{j=1}^{n+1}} [I + (1-\zeta)Q_j], \tag{5}$$

$$Q_j = \begin{vmatrix} -C_0^{*(j)}(C_0^{(j)} + C_0^{*(j)})^{-1} & C_0^{*(j)}(C_0^{(j)} + C_0^{*(j)})^{-1}C_0^{(j)} \\ (C_0^{(j)} + C_0^{*(j)})^{-1} & -(C_0^{(j)} + C_0^{*(j)})^{-1}C_0^{(j)} \end{vmatrix}, \quad Q_j^* = -Q_j, \quad Q_jJ_1 \geq 0$$

Матрицы $C_0 = C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \ldots, C_0^{(n+1)}$ называются параметрами Шура. Отметим, что полученное произведение $\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{n+1}} D_j(\zeta)$ совпадает с построенным ранее кратным множителем $B(\zeta)$, то есть

$$\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{n+1}} D_j(\zeta) = B(\zeta).$$

Тем самым каждой матрице-функции $F(\zeta)$ класса Каратеодори соответствует бесконечное произведение Бляшке—Потапова двучленных множителей

$$\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{\infty}} D_j(\zeta).$$

---

* Требование неособенности блока A обеспечивает возможность выполнения пошагового процесса.

Наоборот, каждому бесконечному произведению двучленных множителей указанного типа соответствует вполне определенная матрица-функция $F(\zeta)$ класса Каратеодори. В нашей задаче произведение Бляшке всегда расходится; точная характеристика расходимости дается с помощью предельных радиусов круга Вейля ([1]). Радиусы круга Вейля

$$F(\zeta)=C^{(n)}+\rho_g^{(n)\frac{1}{2}}\,u\cdot\rho_d^{(n)\frac{1}{2}}\qquad u\cdot u^{*}\leqslant I \tag{6}$$

сейчас имеют вид

$$\rho_g^{(n)}=\frac{|\zeta|^{2n+2}}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left\{[\bar{\zeta}^n I,\bar{\zeta}^{n-1}I,\ldots,I]\,A_{n+1}^{-1}\begin{bmatrix}\zeta^n I\\ \zeta^{n-1}I\\ \sim\ \sim\\ I\end{bmatrix}\right\}^{-1}, \tag{7}$$

$$\rho_d^{(n)}=\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left\{[I,\bar{\zeta}I,\ldots,\bar{\zeta}^n I]\,A_{n+1}^{-1}\begin{bmatrix}I\\ \zeta I\\ \sim\ \sim\\ \zeta^n I\end{bmatrix}\right\}^{-1}, \tag{8}$$

при этом матрицы

$$\left\{[\bar{\zeta}^n I,\bar{\zeta}^{n-1}I,\ldots,I]\,A_{n+1}^{-1}\begin{bmatrix}\zeta^n I\\ \zeta^{n-1}I\\ \sim\ \sim\\ I\end{bmatrix}\right\}^{-1},\quad \left\{[I,\bar{\zeta}I,\ldots,\bar{\zeta}^n I]\,A_{n+1}^{-1}\begin{bmatrix}I\\ \zeta I\\ \sim\ \sim\\ \zeta^n I\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

с ростом n монотонно убывают.

Очевидно, ранг левого предельного радиуса ρ_g всегда равен нулю, что обеспечивает единственность решения.

Что же касается правого предельного радиуса, то можно привести примеры задач Каратеодори с любым наперед заданным значением ранга ρ_d. Поэтому в задаче Каратеодори естественно возникает классификация различных случаев по рангу правого предельного радиуса.

2°. Весьма любопытным является применение полученных результатов к скалярному случаю. Теперь в равенстве (6) все величины скалярны и поэтому допустима перестановка

$$F(\zeta)=C+\rho_g^{\frac{1}{2}}u\rho_d^{\frac{1}{2}}=C+u\rho_g^{\frac{1}{2}}\rho_d^{\frac{1}{2}}=C+u\rho,$$

которая приводит к обычной записи круга с одним радиусом. Однако целесообразно и здесь сохранить понятие левого и правого радиуса. Выражения (7), (8) для радиусов перепишутся в виде

$$\rho_g^{(n)}=\frac{|\zeta|^{2n+2}}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left\{\sum_{j=0}^{n}\frac{|P_j(\zeta)|^2}{h_j}\right\}^{-1}, \tag{9}$$

$$\rho_d^{(n)}=\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}}\left\{\sum_{j=0}^{n}\frac{|P_j(\zeta)|^2}{h_j}\right\}^{-1}, \tag{10}$$

где

$$P_j(\zeta)=\frac{1}{\det A_j}\begin{vmatrix} C_0+C_0^* & C_1^* & \dots & C_{j-1}^* & C_j^* \\ C_1 & C_0+C_0^* & \dots & C_{j-2}^* & C_{j-1}^* \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_{j-1} & C_{j-2} & \dots & C_0+C_0^* & C_1^* \\ 1 & \zeta & \dots & \zeta^{j-1} & \zeta^j \end{vmatrix},$$

$$\det A_j=\begin{vmatrix} C_0+C_0^* & C_1^* & \dots & C_{j-1}^* \\ C_1 & C_0+C_0^* & \dots & C_{j-2}^* \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ C_{j-1} & C_{j-2} & \dots & C_0+C_0^* \end{vmatrix}$$

известные ортогональные полиномы на окружности [2]; $h_j=\dfrac{\det A_{j+1}}{\det A_j}$.

Очевидно, $\rho_g=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_g^{(n)}=0$, а для правого предельного радиуса $\rho_d=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_d^{(n)}$ возможны два случая: $\rho_d\neq 0$, $\rho_d=0$ в зависимости от того будет ли сходящимся или расходящимся ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|P_j(\zeta)|^2}{h_j}. \tag{11}$$

Сходимость ряда (11) отвечает случаю C, а расходимость ряда (11) — случаю D в классификации задач Каратеодори [2].

3°. С задачей Каратеодори тесно связана задача о структуре и продолжении эрмитово положительных функций.

Функция $f(x)(-\infty<x<\infty)$ называется эрмитово положительной на вещественной оси, если для любого набора точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j-x_k)\xi_j\bar{\xi}_k\geq 0.$$

Функция $f_l(x)$ называется эрмитово положительной на сегменте $[-l, l]$, если для любого набора неотрицательных точек этого сегмента $0\leq x_1, x_2, \dots, x_n\leq l$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} f_l(x_j-x_k)\xi_j\bar{\xi}_k\geq 0.$$

Очевидно, каждая эрмитово положительная на бесконечном промежутке $(-\infty<x<\infty)$ функция $f(x)$ будет эрмитово положительной и на любом конечном промежутке $[-l, l]$. Пусть наоборот, задана на конечном промежутке $[-l, l]$ эрмитово положительная функция $f_l(x)$. Возникает вопрос о возможности продолжения этой функции на всю действительную ось с сохранением эрмитовой положительности.

Неравенство (2) позволяет вывести основное матричное неравенство для этой задачи и доказать существование продолжения.

Пусть $f_l(x)$ — эрмитово положительная функция, заданная на $[-l, l]$, непрерывная в точке $x=0$, а $f(x)$ — ее продолжение на $(-\infty<x<\infty)$. По теореме Бохнера

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, d\sigma(t).$$

и каждому продолжению отвечает своя монотонная функция $\sigma(t)$(см., напр. ([4]).) Функции $\sigma(t)$ ставится в соответствие неванлинновская функция

$$w(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}.$$

Теорема: *Для того, чтобы эрмитово положительная функция $f(x)$ была продолжением эрмитово положительной функции $f_l(x)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая функция $w(z)$ удовлетворяла основному матричному неравенству*

$$\begin{bmatrix} \int_0^l\int_0^l f(x-s)\varphi(x)\overline{\varphi(s)}\,dx\,ds & \int_0^l \left[iw^*(z)e^{i\bar z x}-\int_0^x f(x-s)e^{i\bar z s}ds\right]\varphi(x)\,dx \\ * & \dfrac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Вывод основного матричного неравенства проводится следующим образом: сегмент $[0,l]$ делится на n равных частей; значения $f_l(x)$ в точках деления объявляются коэффициентами ряда Тейлора задачи Каратеодори. Записывается основное матричное неравенство задачи Каратеодори. Целесообразный переход к пределу при $n\to\infty$ приводит нас к неравенству (12). Существование же решения неравенств Каратеодори и принцип компактности обеспечивает наличие решения неравенства (12), а значит и существование продолжения эрмитово положительной функции $f(x)$.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ

J-ձգող մատրիցա-ֆունկցիաները Կարաթեոդորիի խնդրում

Հոդվածում բազմապատիկ արտադրիչի տեսության հիման վրա լուծվում է մատրիցային գրվածքով Կարաթեոդորիի խնդիրը։

Խնդիրը բերվում է Կարաթեոդորիի C դասի ֆունկցիաների համար գրված Շվարցի-Պիկի հայտնի անհավասարությունից սահմանային անցման միջոցով ստացվող հիմնական մատրիցային անհավասարության լուծմանը։ Այդ անհավասարության ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է C դասի կամայական $f(\zeta)$ մատրիցա-ֆունկցիայից կոտորակա-գծային

$$F(\zeta)=[a(\zeta)f(\zeta)+b(\zeta)][c(\zeta)f(\zeta)+d(\zeta)]^{-1}$$

ձևափոխության տեսքով, որի գործակիցների

$$B(\zeta)=\begin{pmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{pmatrix}$$

մատրիցան հանդիսանում է բազմապատիկ արտադրիչ, այսինքն՝ J-ձգող միավոր շրջանում, J-ունիտար նրա եզրի վրա և $\zeta=\infty$ կետում $n+1$ կարգի բևեռ ունեցող մատրից-ֆունկցիա։

Միաժամանակ ապացուցվում է Կարաթեոդորիի խնդրի ադեկվատությունը լրիվ ռանգի երկանդամ արտադրիչների

$$\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{n+1}}[I+(1-\zeta)Q_j], \quad Q_j^2=-Q_j, \quad Q_jJ\geq 0$$

վերջավոր արտադրյալի տրմանը։ Դրանով իսկ C դասի ամեն մի $F(\zeta)$ մատրից-ֆունկցիային համապատասխանում է երկանդամ արտադրիչների

$$\overset{\frown}{\prod_{j=1}^{\infty}}[I+(1-\zeta)Q_j]$$

անվերջ արտադրյալ և հակառակը։

Ստացված արդյունքները, կիրառված սկալյար դեպքի համար, բերում են շրջանագծի վրա օրթոգոնալ հայտնի բազմանդամների միջոցով հիմնական բանաձևերի գրառմանը։

Ապացուցվում է, որ ձախ սահմանային շառավիղը միշտ հավասար է զերոյի, իսկ աջի ռանգը կարող է ընդունել ցանկացած թույլատրելի արժեքներ։ Էրմիտյան դրական ֆունկցիաների ստրուկտուրայի և շարունակման խնդրի համար ստացված է հիմնական մատրիցային անհավասարություն և ապացուցված է շարունակման գոյությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов*, ДАН АрмССР, т. LIX, № 1 (1974). [2] *И. В. Ковалишина*, «Известия АН Арм. ССР», т. VI, № 1 (1971). [3] *Н. И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов, стр. 220—237, ГИФМЛ, М., 1961. [4] *S. Bochner*, Vorlesung über Fouriesche Integrale (Leipzig, 1932).