ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Р. С. Галоян

Об асимптотических свойствах функции $\pi_p(z; z_k)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/V 1974)

1°. После ставших уже классическими результатов Р. Неванлинны о факторизации мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$ с ограниченной характеристикой $T(r; F)$ [1], в ранних работах М. М. Джрбашяна [2,3] рассматривались вопросы канонического представления функций более широких классов.

На этом пути им был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z; z_k)$ $(0 \le \alpha < \infty)$, аналитических в круге $|z|<1$, с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (0 \le \alpha < +\infty). \tag{1}$$

Функции эти при условии (1) определялись следующим образом:

$$\pi_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\{-U_\alpha(z; z_k)\}, \tag{2}$$

где:

$$U_\alpha(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}dt - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int_0^{|\zeta|}(1-t)^{\alpha+1}t^{n-1}dt.$$

Было установлено [3], что при любом целом $\alpha=p\geqslant 1$ функция имеет такую же структуру, что и бесконечное произведение Вейерштрасса, а именно:

$$\pi_p(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)^n\right\}, \tag{3}$$

а при $\alpha=0$

$$\pi_0(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-z\bar{z}_k}\bar{z}_k = \left(\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|\right)\cdot B(z; z_k), \tag{4}$$

где $B(z; z_k)$ — функция Бляшке.

В предположении, что последовательность нулей $\{z_k\}_1^\infty$ имеет лишь одну предельную точку на окружности $|z|=1$, мы будем исследовать асимптотические свойства функций типа $\pi_p(z;z_k)$ $(p\geqslant 0)$ в окрестности той же граничной точки. В общих чертах следуя известному методу исследования асимптотических свойств целых функций [1] [3] в данной статье устанавливаются точные асимтотические формулы для $\pi_p(z;z_k)$ при довольно общих предположениях о плотности распределения нулей $\{z_k\}_1^\infty$.

Отметим, что функцию $\ln\pi_p(z;z_k)$ мы будем рассматривать в единичном круге, разрезанном вдоль отрезков, соединяющих все нули функции $\pi_p(z;z_k)$ с точкой $z=1$.

2°. Обозначая

$$A_p(z;z_k)=\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-z\bar{z}_k}\right)^n\right\} \tag{5}$$

из (3) получим

$$\pi_p(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}A_p(z;z_k) \tag{6}$$

Пусть последовательность $\{z_k\}_1^\infty(|z_k|<1,\ k=1,2,\ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty}z_k=1)$ расположена на одном луче, а именно $z_k=1-r_ke^{-i\psi}$, причем

$$0<r_{k+1}\leqslant r_k<2\cos\psi,\quad |\psi|<\frac{\pi}{2}-\eta\quad(\eta>0). \tag{7}$$

Для любого $t(0<t<2\cos\psi)$ обозначим через $n(t)$ число точек $z_k=1-r_ke^{-i\psi}$, для которых $t<r_k<2\cos\psi$.

Приведем без доказательства две леммы.

Лемма 1. *Пусть при некотором* $\rho<p+1$ $(p\geqslant 0)$ и $c>0$

$$n(t)<c\cdot t^{-\rho}\quad(0<t<2\cos\psi). \tag{8}$$

Пусть далее $z=1-re^{-i\varphi}(\varphi\neq\psi,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2},\ |\psi|<\frac{\pi}{2}),\ \sigma\in(0;\frac{1}{2})$ *и*

$$h_\sigma(z)=\prod_{0<r_k<\sigma r}A_p(z;z_k). \tag{9}$$

Тогда при $0<r<\min\{1,2\cos\varphi\}$

$$|\ln h_\sigma(1-re^{-i\varphi})|<C_p\sigma^{p+1-\rho}\cdot r^{-\rho}, \tag{10}$$

где постоянная C_p *не зависит от* r *и* σ.

Лемма 2. *Пусть последовательность точек* $z_k=1-r_ke^{-i\psi}$ $(|\psi|<\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\leqslant|z_k|<1)$ *вновь удовлетворяет условию* (8) *и* $\tau>2$ — *любое число.*

Положим далее, что $z=1-re^{-i\varphi}(\varphi\neq\psi,|\varphi|<\frac{\pi}{2},\ 0<r<2\cos\varphi)$

произвольная точка, лежащая внутри единичного круга.

Тогда при $0<r<\min\{2\cos\varphi, \frac{2}{\tau}\cos\psi\}$ *положив*

$$H_\tau(z)=\prod_{r\tau<r_k<2\cos\psi} A_p(z,z_k), \tag{11}$$

будем иметь

$$|\ln H_\tau(1-re^{-i\varphi})|<C'_p\tau^{-\rho}\cdot r^{-\rho} \tag{12}$$

где постоянная C'_p *не зависит от* r *и* τ.

Из лемм 1 и 2 очевидно следует

Лемма 3. *Для любого* $\varepsilon>0$ *можно выбрать* $\vartheta>0$ *достаточно малым и* $\tau>2$ *достаточно большим так, чтобы неравенства*

$$|\ln h_\tau(1-re^{-i\varphi})|<\varepsilon\cdot r^{-\rho},\quad |\ln H_\tau(1-re^{-i\varphi})|<\varepsilon\cdot r^{-\rho} \tag{13}$$

выполнялись для всех значений

$$0<r<\min\{1, 2\cos\varphi, \frac{2}{\tau}\cos\psi\}.$$

Причем $1\leqslant p\leqslant\rho<p+1$ *или* $p=0$, $0<\rho<1$.

На основании леммы 3 устанавливаются следующие теоремы об асимптотическом представлении функции $\pi_p(z;z_k)$ в специальном случае распределения ее нулей

Теорема 1. *Пусть последовательность точек* $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k|<1$, $k=1,2,\dots$, $\lim_{k\to\infty} z_k=1$) *лежит на луче* $\arg(1-z)=-\psi$ ($|\psi|<\frac{\pi}{2}$) *и имеет плотность*

$$\Delta=\lim_{t\to\infty} t^{-\rho}n(t), \tag{14}$$

где $\rho>0$ *некоторое нецелое число, причем* $[\rho]=p\geqslant 0$. *Тогда при* $z=1-re^{-i\varphi}$ ($|z|<1$, $\varphi\neq\psi$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)

$$\lim_{r\to 0} r^\rho\ln\pi_p(1-re^{-i\varphi};z_k)=\frac{\pi\cdot\Delta}{\sin\pi\rho}M(\varphi;\psi), \tag{15}$$

где

$$M(\varphi;\psi)=\{\exp[i\rho(\varphi-\psi)-i\pi\rho\,\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]- -e^{i\rho(\varphi+\psi)-2\rho i\psi}\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{p-k+1}\binom{p-\rho}{k-1}(1+e^{2i\psi})^{k-1}\}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Если* $\rho=p\geqslant 1$ *целое число, а другие условия теоремы 1 остаются неизменными, то*

$$\lim_{r\to 0} r^p\ln\pi_p(1-re^{-i\varphi};z_k)=-\Delta e^{ip(\varphi-\psi)}\{i[2\psi+\pi\,\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]+ +\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}(1+e^{2i\psi})^k\}. \tag{17}$$

3. В общем случае на последовательность $\{z_k\}_1^\infty (0<|z_k|<1, \lim_{k\to\infty} z_k = 1)$ мы налагаем следующие условия:

а) Для данного целого $p \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{p+1} < +\infty.$$

б) Если $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$, то $0 < r_{k+1} \leqslant r_k < 2\cos\psi_k$ и $|\psi_k| \leqslant$ (18)

$$\leqslant \frac{\pi}{2} - \eta \; (\eta > 0) \; k = 1, 2, \ldots .$$

в) Для всех значений ψ $\left(|\psi| < \frac{\pi}{2} - \eta\right)$, за исключением, быть может, счетного множества, существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0} t^\rho n(t) = \Delta(\psi) \tag{19}$$

при некотором ρ, причем $|\rho| = p > 0$. Здесь $n(t; \psi)$ — означает число точек $z_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$, для которых

$$t < r_k < 2\cos\psi_k, \quad -\frac{\pi}{2} + \eta < \psi_k < \psi.$$

г) Существует число $d > 0$ такое, что кружки радиусов

$$\rho_k = d(1-|z_k|)^{1+\frac{\rho}{2}} \tag{20}$$

с центрами в точках $\{z_k\}_1^\infty$ не пересекаются.

Множество точек этих кружков мы назовем C° — множеством.

Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ введем в рассмотрение последовательность точек $\{z'_k\}_1^\infty$ $(|z'_k| < 1, \lim_{k\to\infty} z'_k = 1)$, удовлетворяющих условиям

$$z'_k = 1 - r_k e^{-i\psi'_k}, \quad |\psi_k - \psi'_k| < t < \frac{\eta}{2} \tag{21}$$

и положим

$$f_\delta(z) = \prod_{|z_k - z| < \delta(1-r)} A_p(z; z_k); \; F_\delta(z) = \prod_{|z_k - z| \geq \delta(1-r)} A_p(z; z_k); \tag{22}$$

$$f'_\delta(z) = \prod_{|z'_k - z| < \delta(1-r)} A_p(z; z'_k); \; F'_\delta(z) = \prod_{|z'_k - z| \geq \delta(1-r)} A_p(z; z'_k),$$

где $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $|z| = r < 1$.

Для доказательства основного результата нами устанавливаются следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть z $(|z| = r < 1)$ не принадлежит C° — множеству. Тогда при $1 \leqslant p < \rho < p+1$ или $p=0$, $0 < \rho < 1$ для любого $\varepsilon > 0$ и при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место неравенство*

$$|\ln f_\delta(z)| < \varepsilon \cdot (1-r)^{-\rho} \left(\frac{1}{2} < r < 1\right). \tag{23}$$

Лемма 5. *При* $1<p\leqslant\rho<p+1$ *или* $p=0$, $0<\rho<1$ *для любого* $\varepsilon<0$ *и для всех достаточно малых* $t>0$ *имеет место неравенство*

$$|\ln F_t(z)-\ln F_t^1(z)|<\varepsilon(1-r)^{-\rho}\qquad\left(|z|=r<\frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

4°. Докажем теперь теорему об асимптотическом представлении функции $\pi_p(z;\, z_k)$ в общем случае распределения ее нулей.

Теорема 3. *Пусть последовательность точек* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* а), б), в) и г). *Тогда при* $z=1-re^{-i\varphi}\left(|z|<1,\,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\eta\right)$, *не принадлежащем* C^0 *—множеству, для функции* $\pi_p(z;\, z_k)$ $(0\leqslant p<\rho<p+1)$ *справедливо предельное соотношение притом равномерно по* $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\eta$

$$\lim_{r\to 0} r^\rho \ln \pi_p(1-re^{-i\varphi};\, z_k)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta} M(\varphi;\,\psi)\,d\Delta(\psi), \tag{25}$$

где $M(\varphi;\,\psi)$—функция (16).

Доказательство. Произведем разбиение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}+\eta;\,\frac{\pi}{2}-\eta\right]$ точками $\{\vartheta_i\}_0^n$ таким образом, чтобы

$$-\frac{\pi}{2}+\eta=\vartheta_0<\vartheta_1<\ldots<\vartheta_n=\frac{\pi}{2}-\eta,$$

и при достаточно малом $t>0$ имели

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\vartheta_j-\vartheta_{j-1}|=t$$

Любую из точек $z_k=1-r_ke^{-i\psi_k}(k=1,\,2,\ldots)$ заменим соответственно точкой $z_k'=1-r_ke^{-i\vartheta_j}$ положив, что при данном k ϑ_j $(0\leqslant j\leqslant n)$ определяется из условия $\vartheta_j\leqslant\psi_k<\vartheta_{j+1}$.

Наконец, определим функцию

$$\pi_p^t(z;\,z_k')=\prod_{k=1}^{\infty}A_p(z;\,z_k'). \tag{26}$$

Заметив, что в силу определений (22)

$$\pi_p(z;\,z_k)=f_t^1(z)\cdot F_t(z),\quad \pi_p^t(z;\,z_k')=f_t^1(z)\cdot F_t^1(z),$$

будем иметь

$$|\ln\pi_p(z;\,z_k)-\ln\pi_p^t(z;\,z_k')|\leqslant|\ln f_t(z)|+|\ln f_t^1(z)|+|\ln F_t(z)-\ln F_t^1(z)|. \tag{27}$$

Применяя лемму 4 к функциям $f_t(z)$ и $f_t^1(z)$, и учитывая также лемму 5, из (27) получим, что для любого $\varepsilon>0$ и для всех достаточно малых $t>0$ имеет место неравенство

$$|\ln \pi_p(1-re^{-i\varphi};\ z_k)-\ln \pi_p'(1-re^{-i\varphi};\ z_k')|<\frac{\varepsilon}{2}r^{-\rho} \tag{28}$$

при всех $z=1-re^{-i\varphi}$ $\left(|z|<1,\quad |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\eta\right)$ не принадлежащих C° — множеству.

Далее обозначим через $G_j'(z;\ z_k')$ произведение тех множителей из $\pi_p'(z;\ z_k')$, для которых точки z_k' расположены на луче $\arg(1-z)=-\vartheta_j$ $(0\leqslant j\leqslant n-1)$. Очевидно, что

$$\pi_p'(z;\ z_k')=\prod_{j=0}^{n-1}G_j'(z;\ z_k'). \tag{29}$$

Обозначая

$$S_n(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\sum_{j=0}^{n-1}M(\varphi;\ \vartheta_j)[\Delta(\vartheta_{j+1})-\Delta(\vartheta_j)], \tag{30}$$

и применяя теорему 1 к каждой функции $G_j(z;\ z_k)$ (что, очевидно, допустимо) из (29) получим, что существует число $r(\varepsilon)>0$ и $\eta_1>0$ так, что при $0<r<r(\varepsilon)$, $|\varphi-\vartheta_j|\geqslant\eta_1$

$$|r^{-\rho}\ln \pi_p'(1-re^{-i\varphi};\ z_k')-S_n(\varphi)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Отсюда и из (28) следует, что если $z=1-re^{-i\varphi}\overline{\in}C^{\circ}$, то при $0<r<r(\varepsilon)$

$$|r^{-\rho}\ln \pi_p(1-re^{-i\varphi};\ z_k)-S_n(\varphi)|<\varepsilon \tag{32}$$

причем равномерно по φ при $|\varphi-\vartheta_j|\geqslant\eta_1$.

Произведем второе разбиение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}+\eta;\ \frac{\pi}{2}-\eta\right]$ точками $\{\vartheta_j'\}_0^n$, $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\vartheta_j'-\vartheta_{j-1}'|=t$ и выберем число $\eta_1>0$ так, чтобы множества $|\varphi-\vartheta_j|\geqslant\eta_1$ и $|\varphi-\vartheta_j'|\geqslant\eta_1$ перекрывали весь отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}+\eta;\ \frac{\pi}{2}-\eta\right]$.

Тогда неравенство (32) имеет место при $0<r<r(\varepsilon)$, вне C° - множества, равномерно по φ при $|\varphi-\vartheta_j'|\geqslant\eta_1$. В силу того, что множества $|\varphi-\vartheta_j|\geqslant\eta_1$ и $|\varphi-\vartheta_j'|\geqslant\eta_1$ $(0\leqslant j\leqslant n)$ покрывают весь отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}+\eta;\frac{\pi}{2}-\eta\right]$, то неравенство (32) имеет место равномерно по $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2}+\eta;\frac{\pi}{2}-\eta\right]$ при $z=1-re^{-i\varphi}\overline{\in}C^{\circ}$.

Наконец, поскольку

$$\lim_{t\to 0}S_n(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_{-\frac{\pi}{2}+\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta}M(\varphi,\vartheta)\,d\Delta(\vartheta),$$

то из (32) следует утверждение теоремы:

Вполне аналогично, на основании теоремы 2 доказывается

Теорема 4. *Если $\rho=p\geqslant 1$ целое число, а другие условия теоремы 3 остаются неизменными, то вне C°—множества*

$$\lim_{r\to 0} r^{\rho}\ln\pi_{p}(1-re^{-i\varphi};z_k)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta} e^{i\rho(\varphi-\psi)}\Big\{i[2\psi+\pi\,\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]+$$

$$+\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}(1+e^{2i\psi})^{n}\Big\}\,d\Delta(\psi). \qquad (33)$$

Из теоремы 3 вытекает также

Следствие. Функция Бляшке

$$B(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-z\bar{z}_k}\frac{|z_k|}{z_k}$$

в условиях теоремы 3, налагаемых на последовательность $\{z_k\}_1^\infty$, вне C°—множества удовлетворяет равенству

$$\lim_{r\to 0} r^{\rho}\ln\pi_{p}(1-re^{-i\varphi};z_k)=\frac{\pi e^{i\rho\varphi}}{\sin\pi\rho}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta}\{e^{-i\rho[\psi+\pi\,\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]}-e^{i\rho\psi}\}\,d\Delta(\psi). \qquad (34)$$

Это утверждение следует из (4), (25) и (16).

В заключение автор выражает глубокую признательность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Ի. Ս. ԳԱԼՈՅԱՆ

$\pi_\rho(z;z_k)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական հատկությունների մասին

Հոդվածում ուսումնասիրված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծված ([2]) $\pi_\rho(z;z_k)$ *անվերջ արտադրյալի ասիմպտոտական հատկությունները։ Այդ ֆունկցիայի զրոների* $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k|<1$, $\lim_{k\to\infty} z_k=1$) *հաջորդականության բաշխման խտության վրա դրված որոշ սահմանափակումների դեպքում ստացված են ճշգրիտ ասիմպտոտական բանաձևեր* $\ln\pi_\rho(z;z_k)$ *ֆունկցիայի համար, երբ* $z\to 1$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1 (1945). [3] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, 2, 1948. [4] *Б. Я. Левин*, Мат. сб. 2(44) : 6 (1937), 1057—1142.