ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.521.8

Р. И. Овсепян

О безусловной суммируемости рядов в линейных топологических пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1974)

Условимся относительно обозначений:
X—произвольное полное отделимое линейное топологическое пространство;
S—пространство конечных измеримых на (0, 1) функций с метрикой, эквивалентной сходимости по мере;
T—регулярный матричный метод Теплица ([1]).

Для $x_n \in X$ символ $(\backepsilon\sum x_n)$ $\backepsilon T\sum x_n$ будет обозначать, что ряд $\sum x_n$ после любой перестановки (сходится) суммируется методом T в пространстве X.

Если $f_n(t) \in S$, то $(\backepsilon\sum f_n(t)$ *п. в.*$)$ $\backepsilon T\sum f_n(t)$ *п. в.* означает, что ряд $\sum f_n(t)$ после любой перестановки (сходится почти всюду на (0, 1)) суммируется методом T почти всюду на (0, 1)*.

Последовательность (x_n) в банаховом пространстве E называется T—базисом ([2,3]), если для любого $x \in E$ существует единственный ряд $\sum a_n x_n$, который T—суммируется к x.

Последовательность (x_n) в E называется безусловным T—базисом, если после любой перестановки является T—базисом.

Понятие безусловной T—суммируемости ряда является прямым обобщением безусловной сходимости. В связи с этим естествен вопрос о взаимоотношении между этими понятиями.

Сформулируем ранее полученные результаты в этом направлении.

Теорема А (В. Орлич ([4])). *Чтобы* $\backepsilon T\sum f_n(t)$ *п. в.* $\rightleftarrows \backepsilon\sum f_n(t)$ *п. в.*, *необходимо и достаточно выполнение условия* $f_n(t) \to 0$ *п. в.* $(f_n \in S)$.

И. И. Волковым было замечено (на примере ряда $\sum 1$), что без дополнительных условий $\backepsilon T\sum f_n(t)$ *п. в.* $\nrightarrow \backepsilon\sum f_n(t)$ *п. в.* Далее В. Ф. Гапошкиным и А. М. Олевским ([5]) было показано, что ряд $\sum 1$ является по существу единственным примером безусловно суммирующегося, но расходящегося числового ряда.

---

* Заметим, что множество (сходимости) суммируемости вообще говоря зависит от порядка членов ряда, так что может не найтись ни одной фиксированной точки, в которой ряд безусловно (сходится) суммируется.

Теорема Б (А. М. Олевский [6,7]). *Если ряд* $\sum f_n(t)$ $(f_n \in S)$ *безусловно* T*—суммируется п. в., то имеет место равенство* $f_n(t) = f(t) + \varphi_n(t)$, $(f, \varphi_n \in S)$, *где ряд* $\sum \varphi_n(t)$ *безусловно сходится п. в. При этом, если метод* T *суммирует ряд* $\sum 1$ *(коротко* $T\sum 1$*), то* $f(t)$ *может быть произвольной, если же* $T\overline{\sum} 1$, *то* $f(t)=0$ *п. в.*

Нетрудно заметить, что теорема А вытекает из теоремы Б.

Теорема В (П. Л. Ульянов [8])*. *Если ряд* $\sum f_n(t)$ $(f_n \in S)$ *безусловно* T*—суммируется по мере, то* $f_n(t) = f(t) + \varphi_n(t)$ $(f, \varphi_n \in S)$, *где ряд* $\sum \varphi_n(t)$ *безусловно сходится по мере и если* $T\overline{\sum} 1$, *то* $f(t)=0$ *п. в., а для* $T\sum 1$ $f(t)$ *может быть любой.*

При этом П. Л. Ульяновым было показано, что теорему Б можно получить из теоремы В.

Метод доказательства теоремы Б позволяет установить более общий результат:

Теорема 1. *Чтобы ряд* $\sum x_n$ $(x_n \in X)$ *был безусловно* T*—суммируемым (в* X*) необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* $x_n = \alpha + \alpha_n$, *где ряд* $\sum \alpha_n$ *безусловно сходится и безусловно суммируется***, *причем, если* $T\overline{\sum} 1$, *то* $\alpha = 0$, *в противном случае* α *может быть любым элементом из* X.

Ясно, что теорема *В* получится из теоремы 1, если в последней положить $X = S$.

Теорема 1 позволяет, используя некоторые ранее известные результаты (доказанные для случая, когда T—единичная матрица), обобщить их на случай любых регулярных T—методов.

Ниже формулируются несколько таких обобщений.

Прежде всего заметим, что из теоремы 1 легко вытекает

Следствие***. *В любом банаховом пространстве безусловный* T*—базис является безусловным базисом.*

Далее, учитывая это следствие и известные факты о том, что в пространствах $C([0, 1])$ (Карлин [9]) и $L_1([0, 1])$ (А. Пельчинский [10]) нет безусловных базисов, получаем, что верна

Теорема 2. *Ни при одном методе* T *в пространствах* $C([0, 1])$ *и* $L_1([0, 1])$ *нет безусловных* T*—базисов.*

Далее из теоремы 1 и известного результата Дворецкого—Роджерса [11] легко следует

Теорема 3. *Чтобы банахово пространство* E *было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы для любого метода* T *выполнялось соотношение*

$$\exists T\sum x_n \Longleftrightarrow \exists T\sum \|x_n\| \quad (x_n \in E)$$

Верна также

---

* На самом деле П. Л. Ульяновым была доказана теорема В для более широкого класса матричных методов суммируемости.

** Насколько нам известно, в X вообще говоря, $\exists \sum \alpha_n \rightarrow \exists T\sum \alpha_n$.

*** Первоначально утверждение, сформулированное в следствии, было доказано нами другим способом. А. А. Талалян обратил наше внимание на возможную связь этого утверждения с теоремами Б, В. Это замечание послужило поводом для установления теоремы 1.

Теорема 4. *Чтобы ряд $\sum x_n$ в банаховом пространстве был безусловно T—суммируемым, необходимо и достаточно, чтобы любой его подряд T—суммировался.*

Необходимость вытекает из теоремы 1 и соответствующей теоремы Орлича (когда T—единичная матрица); достаточность требует особого доказательства.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ի. Հովսեփյան

Շարքերի ոչ պայմանական գումարելիության մասին գծային տոպոլոգիական տարածություններում

Հոդվածի հիմնական պնդումը պարունակվում է առաջին թեորեմում (теорема 1), *որում բնութագրվում է ոչ պայմանական T-հանրագումարելի շարքերի (գծային տոպոլոգիական տարածություններում) վարքը ոչ պայմանական զուգամիտության տեսակետից։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Харди*, Расходящиеся ряды, М., 1951. [2] *В. Я. Козлов*, ДАН СССР, 73, № 4 (1950). [3] *B. Gellbaum*, Duke Math. J., 17 (1950). [4] *W. Orlicz*, Bull. Acad. Polonaise, 1927. [5] *В. Ф. Гапошкин, А. М. Олевский, А* Научные доклады высш. шк. физ. мат. науки, № 6, 1958. [6] *А. М. Олевский*, ДАН СССР, 125, № 2 (1959). [7] *А. М. Олевский*, Сибирский матем. журнал, т. 5, № 5, (1964). [8] *П. Л. Ульянов*, Известия АН СССР, сер. матем., 23, № 5, (1959). [9] *S. Karlin*, Duke Math. J., 15 (1948). [10] *A. Pelczinski*, Studia Math., 19 (1960). [11] *A. Dvoretzky, C. A. Rogers*, Proc. Nat. Acad. Sci (USA) 36, 1950.