

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О конечноточечных бикомпактных и H -замкнутых расширениях топологических пространств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 25/VI 1974)

В настоящей заметке рассматривается вопрос о том, когда хаусдорфово пространство допускает n -точечное хаусдорфово бикомпактное расширение и когда оно допускает n -точечное H -замкнутое расширение, а также вопрос о числе таких расширений. В случае $n=1$ хорошо известна теорема П. С. Александрова об одноточечной бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства ⁽¹⁾.

Результаты этой заметки являются следствиями более общих утверждений, часть которых приведена в ⁽²⁻⁴⁾.

Семейство τ открытых множеств топологического пространства (X, V) назовем открытым фильтром этого пространства, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$(F_1) \quad \emptyset \notin \tau;$$

$$(F_2) \quad v_1, v_2 \in \tau \Rightarrow v_1 \cap v_2 \in \tau;$$

$$(F_3) \quad v \in \tau, v_1 \in V, v \subset v_1 \Rightarrow v_1 \in \tau.$$

Пусть τ_v — семейство всех открытых множеств топологического пространства (X, V) , дополнения которых бикомпактны. Легко проверить, что τ_v для любого топологического пространства (X, V) удовлетворяет условиям (F_2) и (F_3) открытого фильтра, поэтому оно будет открытым фильтром тогда и только тогда, когда (X, V) небикомпактное пространство.

Семейство Φ открытых фильтров пространства (X, V) назовем *отделимым*, если для любой пары различных элементов $\tau, \psi \in \Phi$ существуют $u \in \tau$ и $v \in \psi$ такие, что $u \cap v = \emptyset$.

Теорема 1. Хаусдорфово пространство (X, V) допускает n -точечное хаусдорфово бикомпактное расширение тогда и только тогда, когда оно локально бикомпактно и обладает n дизъюнкты-

ми открытыми множествами v_i ($i=1, 2, \dots, n$) такими, что выполнены следующие условия:

$$(i) \bigcup_{i=1}^n v_i \in \mathfrak{z}_V,$$

$$(ii) \forall i \text{ и } \forall v \in \mathfrak{z}_V \quad v \cap v_i \neq \emptyset.$$

При этом число различных (неэквивалентных) n -точечных хаусдорфово бикомпактных расширений совпадает с числом различных отделимых семейств, из которых каждое семейство Φ состоит из n открытых фильтров пространства (X, V) , удовлетворяющих условию $\bigcap \{ \mathfrak{z}; \mathfrak{z} \in \Phi \} = \mathfrak{z}_V$.

Следствие. Пространство R^n , при $n \geq 2$ не допускает $n \geq 2$ точечное хаусдорфово бикомпактное расширение, а в случае $n=1$ не допускает $n \geq 3$ точечное хаусдорфово бикомпактное расширение. Вместе с тем, в последнем случае наряду с одноточечным существует единственное (с точностью до эквивалентности расширений) двухточечное хаусдорфово бикомпактное расширение.

В самом деле, из условий (i), (ii) теоремы 1 вытекает, что R^m может допускать n -точечное хаусдорфово бикомпактное расширение только тогда, когда $\mathfrak{z}_V$ содержит такой элемент $v = \bigcup_{i=1}^n v_i$, пересечение которого с любым элементом семейства $\mathfrak{z}_V$ состоит из n дизъюнктивных непустых открытых множеств. Так как $v \in \mathfrak{z}_V$, то существует замкнутый шар B , содержащий R^m/v . Имеем $R^m/B \in \mathfrak{z}_V$ и $v \cap (R^m/B) = R^m/B$. Но R^m/B при $m \geq 2$ связно, следовательно нельзя представить в виде объединения $n \geq 2$ дизъюнктивных непустых открытых множеств, а в случае $m=1$ его нельзя представить в виде объединения $n \geq 3$ дизъюнктивных непустых открытых множеств.

В случае $m=1$, $n=2$ легко проверить, что открытые множества $v_1 = (-\infty, \beta)$ и $v_2 = (\alpha, +\infty)$ при $\alpha > \beta$ удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно R^1 допускает двухточечное хаусдорфово бикомпактное расширение. Единственность такого расширения следует из того, что, как легко проверить, существует только одно отделимое семейство, состоящее из двух открытых фильтров $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$ пространства R^1 , удовлетворяющих условию $\mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_V$. Базисом для $\mathfrak{z}_1$ служит семейство $\{v \cap v_1; v \in \mathfrak{z}_V\}$, а для $\mathfrak{z}_2 = \{v \cap v_2; v \in \mathfrak{z}_V\}$.

Легко видеть, что теорема 1 в случае $n=1$ равносильна известной теореме П. С. Александрова об односточечной бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства.

В самом деле, пусть (X, V) небикомпактное пространство, тогда поскольку, как было замечено выше, $\mathfrak{z}_V$ — открытый фильтр, то в случае $n=1$ условия (i) и (ii) теоремы 1 будут выполняться автоматически, если в качестве v_1 взять произвольный элемент семейства $\mathfrak{z}_V$. Обратно, если для некоторого открытого множества v_1 выполнено ус-

ловие (ii) теоремы 1, то пустое множество не принадлежит семейству $\mathcal{O}_V$, следовательно $\mathcal{O}_V$ — открытый фильтр, а пространство (X, V) — небикомпактно.

Таким образом, для случая $n=1$ теорему 1 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 1'. Хаусдорфово пространство (X, V) допускает одноточечное хаусдорфово бикомпактное расширение тогда и только тогда, когда оно локально бикомпактно и небикомпактно. При этом такое расширение единственно с точностью до эквивалентности расширений.

Пусть H_V — семейство всех открытых множеств хаусдорфова пространства (X, V) , дополнения которых H — замкнуты, а H_V^* — семейство всех открытых множеств пространства (X, V) , внутренность замыкания которых принадлежит H_V . Легко убедиться, что $H_V \subseteq H_V^*$.

Теорема 2. Хаусдорфово пространство (X, V) допускает n -точечное H -замкнутое расширение тогда и только тогда, когда оно локально H -замкнуто и обладает n дизъюнктными открытыми множествами v_i ($i=1, 2, \dots, n$) такими, что выполнены следующие условия:

$$(i) \bigcup_{i=1}^n v_i \in H_V,$$

$$(ii) \forall i \text{ и } \forall v \in H_V \quad v \cap v_i \neq \emptyset.$$

При этом число различных (неэквивалентных) n -точечных H -замкнутых расширений совпадает с числом различных отделимых семейств, из которых каждое семейство Φ состоит из n открытых фильтров пространства (X, V) , удовлетворяющих условию $H_V \subseteq \bigcap \{\varphi : \varphi \in \Phi\} \subseteq H_V^*$.

Следствие. Пространство R^m допускает бесконечно много различных n -точечных H -замкнутых расширений при любых m и n .

В самом деле, рассмотрим, например, случай $m=2$ (в остальных случаях рассмотрения аналогичны). Разделим плоскость R^2 на n частей с помощью n лучей Γ_i ($i=1, 2, \dots, n$), исходящих из одной точки, и пусть v_i — множество точек, лежащих между лучами Γ_i и Γ_{i+1} ($\Gamma_{n+1} = \Gamma_1$). Очевидно, эти открытые множества v_i ($i=1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условиям теоремы 2, следовательно, R^2 допускает n -точечное H -замкнутое расширение при любом n . Пусть φ_i — открытый фильтр пространства R^2 с базисом $\varphi_i = \{v \cap v_i : v \in \mathcal{O}_V\}$. Семейство Φ , состоящее из открытых фильтров $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, очевидно, отделимо. Учитывая, что для пространства R^2 H_V и $\mathcal{O}_V$ совпадают, легко проверить, что Φ удовлетворяет последнему условию теоремы 2, т. е. $H_V \subseteq \bigcap_{i=1}^n \varphi_i \subseteq H_V^*$. Исходя из различных семейств n лучей, таким способом можно построить бесконечно много различных отдели-

мых семейств π открытых фильтров, удовлетворяющих последнему условию теоремы 2. Следовательно, согласно этой теореме пространство R^2 при любом π допускает бесконечно много различных π -точечных H -замкнутых расширений.

В случае $\pi=1$ условия (i), (ii) теоремы 2 равносильны тому, что пространство (X, V) не является H -замкнутым. В самом деле, пусть (X, V) не является H -замкнутым, тогда H_V удовлетворяет условиям (F_1) и (F_2) открытого фильтра, т. е. H_V базис открытого фильтра. Поэтому условия (i), (ii) теоремы 2 будут выполняться, если в качестве u_1 взять произвольный элемент из H_V . Обратно, если для некоторого открытого множества u_1 выполнено условие (ii) теоремы 2, то пустое множество не принадлежит H_V , следовательно, пространство (X, V) не является H -замкнутым.

Таким образом, в случае $\pi=1$, теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2'. Для того, чтобы хаусдорфово пространство (X, V) допускало одноточечное H -замкнутое расширение, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально H -замкнутым и не было H -замкнутым. При этом число различных одноточечных H -замкнутых расширений совпадает с числом различных открытых фильтров $\mathcal{F}$ пространства (X, V) , удовлетворяющих условию $H_V \subset \mathcal{F} \subset H_V^*$.

С точностью до эквивалентности расширений, можно считать, что все одноточечные расширения пространства (X, V) определены на одном и том же множестве $Z = X \cup \{y\}$, поэтому каждое такое расширение определяется только заданием топологии на Z . Пусть $>$ — отношение частичного упорядочения на множестве G_V всех одноточечных H -замкнутых расширений пространства (X, V) , определяемое следующим образом: $(Z, W_1) > (Z, W_2)$ тогда и только тогда, когда $W_2 \subset W_1$.

Следствие. Для любого локально H -замкнутого и не H -замкнутого пространства (X, V) множество G_V полно с указанным отношением $>$ и обладает наименьшим и наибольшим элементами другими словами пара $(G_V, >)$ образует псевдотопологию (*).

В случае, когда (X, V) локально бикompактное, но не бикompактное, хаусдорфово пространство, наименьшее одноточечное H -замкнутое расширение совпадает с одноточечной бикompактификацией этого пространства.

Пусть (X, V) T_1 -пространство. Обозначим через $\mathcal{G}_V$ семейство всех открытых множеств пространства (X, V) , которые являются дополнениями к конечным подмножествам множества X .

Теорема 3. T_1 -пространство (X, V) допускает π -точечное бикompактное Γ_1 расширение тогда и только тогда, когда множество X бесконечно. При этом число различных π -точечных бикompактных T_1 расширений равно числу различных семейств, π -

которых каждое семейство Φ состоит из n открытых фильтров пространства (X, V) , удовлетворяющих условию

$$\delta_V \subseteq \bigcap \{\varphi; \varphi \in \Phi\} \subseteq \delta_V.$$

С точностью до эквивалентности расширений, можно считать, что все n -точечные расширения пространства (X, V) определены на одном и том же множестве $Z = X \cup Y$, где $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. На множестве всех n -точечных расширений пространства (X, V) рассмотрим следующее отношение $>: (Z, W_1) > (Z, W_2)$, если существует непрерывное отображение $f: Z \rightarrow Z$, оставляющее неподвижным множество X .

Следствие. Пусть (X, V) бесконечное T_1 пространство, тогда для любого фиксированного n среди всех n -точечных бикомпактных T_1 расширений этого пространства существует наименьшее расширение. Это же расширение является наименьшим и среди всех n -точечных T_1 расширений.

Если (X, V) к тому же небикомпактно, то семейство N_V всех одноточечных бикомпактных T_1 расширений, с указанным отношением $>$ полно и обладает наименьшим и наибольшим элементами, т. е. пара $(N_V, >)$ образует псевдотопологию.

В случае, когда (X, V) локально бикомпактно и небикомпактно хаусдорфово пространство, наибольшее одноточечное бикомпактное T_1 расширение совпадает с одноточечной бикомпактификацией этого пространства.

Теорема 4. Хаусдорфово пространство с первой (соответственно со второй) аксиомой счетности допускает n -точечное хаусдорфово бикомпактное расширение, удовлетворяющее первой (соответственно второй) аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно счетно в бесконечности и удовлетворяет условиям теоремы 1.

Следствие. Либо все конечноточечные хаусдорфовы бикомпактные расширения локально бикомпактного хаусдорфова пространства удовлетворяют первой (соответственно второй) аксиоме счетности, либо ни одно из них не удовлетворяет первой (соответственно второй) аксиоме счетности.

Теорема 5. Хаусдорфово пространство с первой (соответственно со второй) аксиомой счетности допускает n -точечное H -замкнутое расширение, удовлетворяющее первой (соответственно второй) аксиоме счетности тогда и только тогда, когда для него выполнены условия теоремы 2 и оно обладает счетным семейством H -замкнутых подмножеств таких, что каждое его H -замкнутое подмножество содержится в некотором из них.

Следствие. Для любых m и n пространство R^m допускает бесконечно много n -точечных H -замкнутых расширений, удовлетворяющих второй аксиоме счетности и бесконечно много n -точечных H -замкнутых расширений, не удовлетворяющих первой аксиоме счетности.

Институт математики

Академии наук Армянской ССР

Տոպոլոգիական տարածությունների վերջավոր կետանոց բիկոմպակտ և
H-փակ լայնացումների մասին

Հոդվածում տրված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնք սկզբնական տարածությունը թույլ տա հաշվելիության առաջին կամ երկրորդ աստիճանի բավարարող n -կետանոց հաուսդորֆյան բիկոմպակտ կամ n -կետանոց H -փակ լայնացումներ:

Քննարկվում է նաև այդպիսի լայնացումների քանակի հարցը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ² С. Г. Овсепян, ДАН СССР, 206, № 4 (1972). ³ С. Г. Овсепян, «Известия АН Армянской ССР», «Математика», VIII, № 3 (1973).