ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 1

УДК 519.210

МАТЕМАТИКА

И. В. Ковалишина, В. П. Потапов

Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/IV 1974)

В настоящей статье рассматривается проблема Неванлинны—Пика ([1]) в матричном аспекте, а именно: дана последовательность точек

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \quad (\lambda_j + \bar{\lambda}_j > 0)$$

из открытой правой полуплоскости и последовательность квадратных матриц m-го порядка

$$w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots \quad (w_j + w^* j > 0)$$

из открытой правой матричной полуплоскости; ищется позитивная матрица-функция $w = w(\lambda)$, то есть голоморфная в правой полуплоскости, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Re} w(\lambda) = \frac{1}{2}\left[w(\lambda) + w^*(\lambda)\right] \geqslant 0$$

такая, что

$$w(\lambda_1) = w_1, \; w(\lambda_2) = w_2, \ldots w(\lambda_n) = w_n \ldots$$

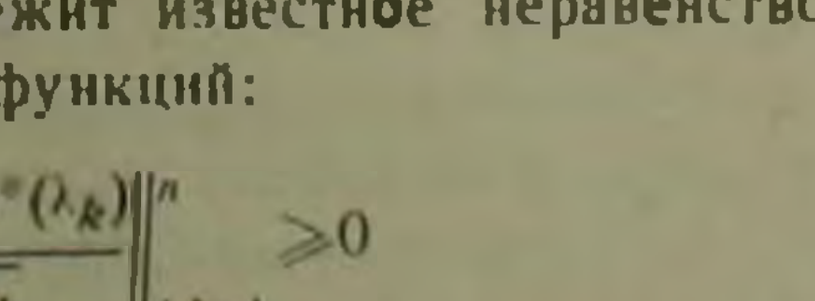
Мы устанавливаем здесь теснейшую связь этой задачи с теорией J-растягивающих матриц-функций ([2]).

В основе исследования лежит известное неравенство Шварца—Пика для позитивных матриц-функций:

$$\left\| \frac{w(\lambda_j) + w^*(\lambda_k)}{\lambda_j + \bar{\lambda}_k} \right\|_{j,k=1}^{n} \geqslant 0 \qquad (1)$$

Как обычно, сначала решается усеченная проблема. Справедлива

Теорема: *Для того, чтобы матрица-функция $w(\lambda)$ была решением проблемы Неванлинны-Пика для конечного числа пар λ_j, w_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица-функция удовлетворяла основному матричному неравенству*



$$\left|\begin{array}{ccc|c} \dfrac{w_1+w_1^*}{\lambda_1+\overline{\lambda}_1} & \cdots & \dfrac{w_1+w_n^*}{\lambda_1+\overline{\lambda}_n} & \dfrac{w_1+w^*(\lambda)}{\lambda_1+\lambda} \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{w_n+w_1^*}{\lambda_n+\overline{\lambda}_1} & \cdots & \dfrac{w_n+w_n^*}{\lambda_n+\overline{\lambda}_n} & \dfrac{w_n+w^*(\lambda)}{\lambda_n+\overline{\lambda}} \\ - & - & - & - \\ \dfrac{w(\lambda)+w_1^*}{\lambda+\overline{\lambda}_1} & \cdots & \dfrac{w(\lambda)+w_n^*}{\lambda+\overline{\lambda}} & \dfrac{w(\lambda)+w^*(\lambda)}{\lambda+\overline{\lambda}} \end{array}\right| \geqslant 0. \qquad (2)$$

В предположении, что блок

$$A=\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{w_1+w_1^*}{\lambda_1+\overline{\lambda}_1} & \cdots & \dfrac{w_1+w_n^*}{\lambda_1+\overline{\lambda}_n} \\ \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{w_n+w_1^*}{\lambda_n+\overline{\lambda}_1} & \cdots & \dfrac{w_n+w_n^*}{\lambda_n+\overline{\lambda}_n} \end{array}\right|$$

неособенный *, решение неравенства (2) записывается в виде дробно-линейного преобразования произвольной позитивной матрицы-функции $\omega(\lambda)$

$$w(\lambda)=[\omega(\lambda)b(\lambda)+d(\lambda)]^{-1}\,[\omega(\lambda)a(\lambda)+c(\lambda)],$$

матрицей коэффициентов которого является групповой элементарный множитель (3), то есть J-растягивающая в правой полуплоскости, J-унитарная на мнимой оси матрица-функция

$$B_n(\lambda)=I+\sum_{j=1}^{n}\frac{2\sigma_j a_j}{\lambda-\lambda_j}=\begin{bmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$$2\sigma_j a_j=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} I \\ w_k^* \end{bmatrix} h_{kj}[I,\ w_j]\,J,$$

$$\| h_{jk} \|_{j,k=1}^{n}=A^{-1},\quad 2\sigma_j=\lambda_j+\overline{\lambda}_j.$$

Параллельно рассматривается и пошаговое решение задачи. Устанавливаются следующие факты:

1. Каждый J-неотрицательный проектор: $P^2=P$, $PJ\geqslant 0$ полного** ранга может быть записан в виде

---

* В скалярном случае вырождение блока A приводит к единственному решению, являющемуся рациональной позитивной функцией. Вопрос о вырождении блока A в матричном случае здесь обсуждаться не будет.

** То есть максимального ранга, в данном случае равного m.

$$P=\begin{vmatrix} (w_0+w_0^*)^{-1}w_0 & (w_0+w_0^*)^{-1} \\ w_0^*(w_0+w_0^*)^{-1}w_0 & w_0^*(w_0+w_0^*)^{-1} \end{vmatrix}, \quad w_0+w_0^*>0$$

2. Если

$$L_0(\lambda)=I+\frac{2\sigma_0}{\lambda-\lambda_0}P=\begin{vmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{vmatrix}$$

элементарный множитель полного ранга, а $\omega(\lambda)$—произвольная позитивная матрица-функция, то дробно-линейное преобразование

$$w(\lambda)=|\omega(\lambda)b(\lambda)+d(\lambda)|^{-1}|\omega(\lambda)a(\lambda)+c(\lambda)|=L_0(\lambda)[\omega(\lambda)]$$

определяет позитивную матрицу-функцию $w(\lambda)$, являющуюся общим решением интерполяционной задачи $w(\lambda_0)=w_0$ с одним узлом.

3. Общий вид позитивных матриц-функций, удовлетворяющих любому конечному числу первых условий

$$w(\lambda_1)=w_1,\ w(\lambda_2)=w_2,\ \ldots,\ w(\lambda_n)=w_n,$$

представим в форме суперпозиции дробно-линейных преобразований

$$w(\lambda)=L_1(\lambda)[L_2(\lambda)|\ \ldots\ |L_n(\lambda)[\omega_n(\lambda)]|\ \ldots\ ||,$$

где $\omega_n(\lambda)$—произвольная позитивная матрица-функция. Матрица коэффициентов результирующего дробно-линейного преобразования равна произведению элементарных множителей полного ранга

$$L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\ \ldots\ L_2(\lambda)L_1(\lambda)$$

$$L_i(\lambda)=I+\frac{2\sigma_i}{\lambda-\lambda_i}P_i,\quad P_i=\begin{vmatrix} (w_i^{(i)}+w_i^{(i)*})^{-1}w_i^{(i)} & (w_i^{(i)}+w_i^{(i)*})^{-1} \\ w_i^{(i)*}(w_i^{(i)}+w_i^{(i)*})^{-1}w_i^{(i)} & w_i^{(i)*}(w_i^{(i)}+w_i^{(i)*})^{-1} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

где матрицы $w_i^{(i)}$—так называемые параметры Шура—последовательно находятся по формулам

$$w_i^{(i)}=L_{i-1}^{-1}(\lambda_i)[L_{i-2}^{-1}(\lambda_i)|\ \ldots\ [L_1^{-1}(\lambda_i)[w_i]|\ \ldots\ ||],\qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

$$(w_1^{(1)}=w_1).$$

Таким образом, постановке любой задачи Неванлинны-Пика соответствует бесконечное произведение двучленных множителей полного ранга

$$\ldots\ L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\ \ldots\ L_2(\lambda)L_1(\lambda),$$

n-ое частичное произведение которого

$$B_n(\lambda)=L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\ \ldots\ L_2(\lambda)L_1(\lambda)^*$$

является матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования произвольной позитивной функции, дающего общее решение усеченной проблемы. Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, зададим произвольное бесконечное произведение двучленных множителей полного ранга

$$\ldots L_n(\lambda) \ldots L_2(\lambda)L_1(\lambda)$$

$$L_i(\lambda) = I + \frac{2\alpha_i}{\lambda - \lambda_i} P_i ,$$

где все λ_i различны между собой. Проектор P_i каждого такого множителя определит позитивную матрицу $w_i^{(0)}$. По $w_i^{(0)}$ строим матрицы

$$w_i = L_1(\lambda_i)\,[L_2(\lambda_i)\,[\ldots [L_{i-1}(\lambda_i)\,[w_i^{(0)}]\,]\ldots]\,]$$

и формулируем проблему Неванлинны—Пика: найти позитивную матрицу-функцию $w(\lambda)$, уловлетворяющую условиям $w(\lambda_j) = w_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Тем самым показано, что *проблема Неванлинны-Пика адекватна изучению бесконечного произведения двучленных множителей полного ранга.*

Дальнейшее исследование связано с рассмотрением кругов Вейля. В терминах $B_n(\lambda)$ неравенство (2) переписывается в виде

$$[w(\lambda),\ I]\,\frac{B_n^{-1}(\lambda) J B_n^{*-1}(\lambda)}{\lambda + \bar{\lambda}} \begin{bmatrix} w^*(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0$$

или

$$[w(\lambda),\ I] \begin{pmatrix} -R_n & S_n^* \\ S_n & -T_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w^*(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \qquad (5)$$

где

$$B_n^{-1}(\lambda)\, J\, B_n^{*-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} -R_n & S_n^* \\ S_n & -T_n \end{pmatrix} = W_n$$

—так называемая матрица Вейля. Неравенство (5) означает, что при фиксированном λ множество решений $w(\lambda)$ неравенства (2) заполняет матричный круг Вейля $B_n(\lambda)$:

$$w(\lambda) = S_n R_n^{-1} + \sqrt{S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n} \cdot u \cdot \frac{1}{\sqrt{R_n}}, \qquad uu^* \leqslant I.$$

Изучение поведения кругов Вейля при возрастании n приводит к следующим результатам: центры $S_n R_n^{-1}$ стремятся к конечному пределу; радиусы $\rho_\varepsilon^{(n)} = S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n$ и $\rho_d^{(n)} = R_n^{-1}$ монотонно убывают; каждый круг Вейля вложен в предыдущий.

В силу основной теоремы С. А. Орлова ([3]) ранги левого и правого радиусов предельного круга не зависят от выбора $\lambda = \lambda_j$.

Мы будем говорить, что проблема Неванлинны-Пика вполне неопределенна, если оба радиуса имеют неособенные пределы.

Имеет место теорема, являющаяся обобщением известного критерия Данжуа (запись станет более прозрачной, если считать, что независимая переменная ζ меняется в единичном круге):

Для того, чтобы проблема Неванлинны-Пика была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\zeta_j|) P_j J \qquad (|\zeta_j| < 1).$$

---

* Обозначение $Ln(\lambda) \ldots L_2(\lambda)L_1(\lambda) = B_n(\lambda)$ не случайно. Доказано, что матрица-функция $B_n(\lambda)$ (3) разлагается в произведение множителей $L_i(\lambda)$ вида (4).

Это условие является необходимым и достаточным для сходимости произведения Бляшке-Потапова двучленных множителей, нормированных в точке $\lambda=0$ к J-модулю ([2]).

И, наконец, доказана теорема о структуре радиусов круга Вейля для любой усеченной проблемы Неванлинны—Пика. Основываясь на ней, удалось доказать следующие утверждения для предельных радиусов:

1. Если левый радиус неособенный, то и правый радиус неособенный;

2. Если правый радиус неособенный, то левый либо неособенный, либо равен нулю.

3. Можно построить проблему Неванлинны—Пика с вырожденными левым и правым радиусами любых наперед заданных рангов.

Органическая связь теории аналитических матриц-функций с другими классическими задачами составит предмет отдельных исследований.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Ի. Վ. ՈՎՍԻՍՅԱՆ, Վ. Պ. ՊՈՏԱՊՈՎ

Ինդեֆինիտ մետրիկաև Նևանլինա-Պիկի պրոբլեմում

Ներկա հոդվածում դիտվում է Նևանլինա-Պիկի հայտնի ինտերպոլյացիոն խնդիրն ավելի ընդհանուր մատրիցային դրվածքով։

Հատած պրոբլեմի լուծումը բերում է հետևյալ պնդմանը՝ $w(\lambda)$ մատրիցա-ֆունկցիան կհանդիսանա քննարկվող խնդրի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ $w(\lambda)$-ն բավարարում է ըստ էությամբ Շվարցի-Պիկի անհավասարություններ հանդիսացող հիմնական մատրիցային անհավասարությանը։

Այդ անհավասարության ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է կամայական պոզիտիվ $w(\lambda)$ մատրիցա-ֆունկցիայից

$$w(\lambda)=|w(\lambda)b(\lambda)+d(\lambda)|^{-1}|w(\lambda)a(\lambda)+c(\lambda)|$$

կոտորակա-գծային ձևափոխության տեսքով, որի գործակիցների

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$$

մատրիցան հանդիսանում է խմբային արտադրիչ, այսինքն՝ ինտերպոլյացիայի հանգույցներում բևեռներ ունեցող, աջ կիսահարթություններում J-ձգող և կեղծ առանցքի վրա J-ունիտար մատրիցա-ֆունկցիա։

Միաժամանակ ապացուցված է Նևանլինա—Պիկի պրոբլեմի ադեկվատությունը լրիվ ռանգի երկանդամ էլեմենտար արտադրիչների

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left|I+\frac{2\alpha_j}{\lambda-\lambda_j}P_j\right|,\qquad P_j^2=P_j,\ P_jJ>0$$

անվերջ արտադրյալի տրմանը։

Վերջապես, Նևանլինա—Պիկի համար դիտարկված է վանյի շրջանների տեսությունը։ Տրված է պրոբլեմի լիովին անորոշության հայտանիշ, ուսումնասիրվում է աջ և ձախ սահմանային շառավիղների կառուցվածքը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Nevanlinna*. Über beschränkte analytische Funktionen, (Ann, Acad· Sci Fennicae, A 32. 1929). [2] *В. П. Потапов*, Тр. Московского мат. общества, т. 4, стр. 125—236, 1955. [3] *В. П. Потапов*, ДАН АрмССР, т. XLVIII, № 5 (1969). [4] *Л. Е. Ефимов, В. П. Потапов*, Успехи мат. наук, т. XXVIII, вып. I (169), 1973. [5] *Л. Орлов*, Всесоюзная конференция по теории функций комплексного переменного, Тезисы докладов. Харьков, 1971.