ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIX 1974 1

УДК 513.813

МАТЕМАТИКА

Л. А. Матевосян

Поверхности в некоторых римановых расслояемых пространствах

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 12/I 1974)

1. Рассмотрим риманово пространство V_n, метрика которого в некоторой системе координат имеет вид

$$ds^2 = r(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{1}{g}_{ab}(u^d)\, du^a du^b + p(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{2}{g}_{\bar{a}\bar{b}}(u^{\bar{d}})\, du^{\bar{a}} du^{\bar{b}} \qquad (1)$$

$(a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n_1)$; $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n)$

Если $r = r(u^c)$, $p = p(u^{\bar{c}})$, то пространство V_n будет приводимым ([1]), а если $r = r(u^c)$, $p = p(u^c)$, то V_n есть полуприводимое пространство ([2]).

Приводимые и полуприводимые пространства, а также поверхности в приводимых пространствах, изучены в работах ([1-5]).

В настоящей работе рассмотрим поверхность X_m в римановом пространстве V_n, метрика которого имеет вид (1), где функции r и p зависят от всех координат $(u^c, u^{\bar{c}})$.

Компоненты метрического тензора такого пространства будут

$$\left.\begin{aligned} g_{ab} &= r(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{1}{g}_{ab}(u^d)\ (A), \quad g_{a\bar{b}} = 0\ \ (B), \\ g_{\bar{a}\bar{b}} &= p(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{2}{g}_{\bar{a}\bar{b}}(u^{\bar{d}})\ (C). \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Теорема 1. *Для того, чтобы метрику риманова пространства V_n можно было привести к виду* (1) *необходимо и достаточно, чтобы оно допускало квазичебышевскую-квазичебышевскую (Кч — Кч) композицию двух многообразий, с вполне ортогональными трансверсальными позициями. Причем, система координат, в которой метрика V_n имеет вид* (1), *является адаптированной по отношению к этой композиции.*

Доказательство. Адаптированные характеристики специальных композиций даны в работе ([6]). В частности, адаптированной характеристикой ($K\text{ч.}-K\text{ч.}$) композиции являются выполнение условий

$$G^{\bar{c}}_{a\bar{b}} = \psi_a \delta^{\bar{c}}_{\bar{b}} \quad (A), \qquad G^{c}_{\bar{a}b} = \psi_{\bar{a}} \delta^{c}_{b} \quad (B). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что из (2) следует (3), то есть V_n с метрикой (1) есть пространство ($K\text{ч.}-K\text{ч.}$) композиции. Наоборот, предположим, что риманово пространство является пространством ($K\text{ч.}-K\text{ч.}$) композиции двух многообразий M_{n_1} и M_{n_2} ($n_1+n_2=n$) позиции V_{n_1} и V_{n_2} которых вполне ортогональны, то есть имеют место (2. В) и (3). Тогда из (2. В) и (3. А) получим

$$\frac{\partial \ln g_{\bar{a}\bar{b}}}{\partial u^a} = 2\psi_a. \tag{4}$$

Свертывая (3. А) по индексам $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и используя соотношение ([2] стр. 164)

$$\frac{\partial \ln \sqrt{g_1}}{\partial u^a} + G^{\bar{b}}_{a\bar{b}} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^a},$$

где g—определитель метрического тензора V_n, а g_1—определитель тензора g_{ab}, получим

$$\psi_a = \frac{1}{n-n_1} \cdot \frac{\partial \ln \sqrt{g_2}}{\partial u^a},$$

где g_2—определитель тензора $g_{\bar{a}\bar{b}}$. Подставляя это значение ψ_a в уравнений (4) и интегрируя их получим

$$g_{\bar{a}\bar{b}} = g_2^{1/n_2}(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{2}{g}_{\bar{a}\bar{b}}(u^{\bar{d}}). \tag{5}$$

Аналогично, из (2. В) и (3. В) получим

$$g_{ab} = g_1^{1/n_1}(u^c, u^{\bar{c}}) \underset{1}{g}_{ab}(u^d). \tag{6}$$

Из (2. В), (5) и (6) следует (2). Этим доказательство теоремы 1 завершено.

2. Пусть уравнения поверхности X_m в V_n будут

$$u^a = u^a(v^\alpha), \qquad u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m). \tag{7}$$

Определение 1. Поверхность, определяемую в V_{n_1} (V_{n_2}) уравнениями $u^a = u^a(v^\alpha)$ ($u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\alpha)$), назовем проекцией X_m на V_{n_1} (V_{n_2}), или первой (второй) проекцией X_m и обозначим через $'X_{m_1}$ ($''X_{m_2}$).

Определение 2. Пересечение поверхности X_m с V_{n_1} (V_{n_2}) назовем первой (второй) внутренней проекцией поверхности X_m.

Нетрудно видеть, что $m_1 < m$, $m_2 < m$, $m_1 + m_2 > m$. Координаты $'X_{m_1}$ обозначим через $'v^{\rho_1}$ ($\rho_1 = 1, 2, \ldots, m_1$). Из определения 1 следует, что ${}'v^{\rho_1} = {}'v^{\rho_1}(v^\alpha)$ и уравнения ${}'X_{m_1}$ в V_{n_1} можно записать в виде $u^a = u^a({}'v^{\rho_1}(v^\alpha))$. Аналогично, уравнения ${}'\overline{X}_{m_2}$ в V_{n_2} можно записать в виде $u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}({}'\overline{v}^{\rho_2}(v^\alpha))$, где ${}'\overline{u}^{\rho_2}(\rho_2 = 1, 2, \ldots, m_2)$—координаты ${}'\overline{X}_{m_2}$. Следовательно, уравнения (7) поверхности X_m в V_n можно привести к виду

$$u^a = u^a({}'v^{\rho_1}(v^\alpha)), \quad u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}}({}'\overline{v}^{\rho_2}(v^\alpha)). \tag{8}$$

Касательные векторы ${}'X_{m_1}$ (${}'\overline{X}_{m_2}$) в $V_{n_1}(V_{n_2})$ обозначим через ${}'\xi^a_{\rho_1}$ (${}'\xi^{\overline{a}}_{\overline{m}}$), а касательные векторы X_m в V_n обозначим через (ξ^a_α, $\xi^{\overline{a}}_\alpha$).

За нормальные векторы к поверхности X_m в V_n выберем векторы $(\underset{t_1}{\nu^a}, 0)$, $(\underset{t}{\nu^a}, \underset{t}{\nu^{\overline{a}}})$, $(0, \underset{t_2}{\nu^{\overline{a}}})$, $(t_1 = 1, 2, \ldots, n_1 - m_1)$, $t = n_1 - m_1 + 1$, $n_1 - m_1 + 2, \ldots, m_1 + m_2 - m)$, $(t_2 = m_1 + m_2 - m + 1, m_1 + m_2 - m + 2 \ldots, n - m)$, где $\underset{t_1}{\nu^a}$—нормальные векторы ${}'X_{m_1}$ в V_{n_1}, а $\underset{t_2}{\nu^{\overline{a}}}$—нормальные векторы ${}'\overline{X}_{m_2}$ в V_n.

В дальнейшем, если речь идет о поверхностях X_m, ${}'X_{m_1}$ и ${}'\overline{X}_{m_2}$, то всегда предполагается, что они рассматриваются в V_n, V_{n_1} и V_{n_2} соответственно, пока не оговорено противное.

Сравнивая основные уравнения поверхностей X_m, ${}'X_{m_1}$ и ${}'\overline{X}_{m_2}$ получим следующие формулы, выражающие связь между метрическими и вторыми тензорами этих поверхностей:

$$g_{\alpha\beta} = {}'g_{\rho_1\sigma_1} \frac{\partial' v^{\rho_1}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' v^{\sigma_1}}{\partial v^\beta} + {}'\overline{g}_{\rho_2\sigma_2} \frac{\partial' \overline{v}^{\rho_2}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' \overline{v}^{\sigma_2}}{\partial v^\beta}, \tag{9}$$

$$\underset{t_1}{b_{\alpha\beta}} = \underset{t_1}{b_{\rho_1\sigma_1}} \frac{\partial' v^{\rho_1}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' v^{\sigma_1}}{\partial v^\beta} - \frac{1}{2p} \cdot \underset{t_1}{H} \cdot g_{\overline{a}\overline{b}} \xi^{\overline{a}}_\alpha \xi^{\overline{b}}_\beta, \tag{10}$$

$$\underset{t_2}{b_{\alpha\beta}} = \underset{t_2}{{}'\overline{b}_{\rho_2\sigma_2}} \frac{\partial' \overline{v}^{\rho_2}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' \overline{v}^{\sigma_2}}{\partial v^\beta} - \frac{1}{2r} \cdot \underset{t_2}{\overline{H}} \cdot g_{ab} \xi^a_\alpha \xi^b_\beta, \tag{11}$$

$$\underset{t}{b_{\alpha\beta}} = {}'G^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1}\, {}'g_{\tau_1\mu_1} \underset{t}{\lambda^{\mu_1}} \frac{\partial' v^{\rho_1}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' v^{\sigma_1}}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 {}'v^{\tau_1}}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \cdot {}'g_{\tau_1\mu_1} \underset{t}{\lambda^{\mu_1}} +$$

$$+ {}'\overline{G}^{\tau_2}_{\rho_2\sigma_2}\, {}'\overline{g}_{\tau_2\mu_2} \underset{t}{\overline{\lambda}^{\mu_2}} \frac{\partial' \overline{v}^{\rho_2}}{\partial v^\alpha} \cdot \frac{\partial' \overline{v}^{\sigma_2}}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 {}'\overline{v}^{\tau_2}}{\partial v^\alpha \partial v_\beta}\, {}'\overline{g}_{\tau_2\mu_2} \underset{t}{\overline{\lambda}^{\mu_2}} +$$

$$+ \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial r}{\partial u^{\overline{a}}} \cdot \xi^{\overline{a}}_\alpha \underset{t}{\lambda^{\mu_1}}\, {}'g_{\tau_1\mu_1} \frac{\partial' v^{\tau_1}}{\partial v^\beta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial r}{\partial u^{\overline{a}}} \xi^{\overline{a}}_\beta \underset{t}{\lambda^{\mu_1}}\, {}'g_{\tau_1\mu_1} \frac{\partial' v^{\tau_1}}{\partial v^\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial u^a} \xi^a_\alpha \underset{t}{\overline{\lambda}^{\mu_2}}\, {}'\overline{g}_{\tau_2\mu_2} \frac{\partial' \overline{v}^{\tau_2}}{\partial v^\beta} + \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial u^a} \cdot \xi^a_\beta \underset{t}{\overline{\lambda}^{\mu_2}}\, {}'\overline{g}_{\tau_2\mu_2} \frac{\partial' \overline{v}^{\tau_2}}{\partial v^\alpha} -$$

$$- \frac{1}{2p} \cdot \overset{1}{K}\, {}'g_{\tau_1\mu_1} \underset{t}{\lambda^{\mu_1}} g_{\overline{a}\overline{b}} \xi^{\overline{a}}_\alpha \xi^{\overline{b}}_\beta - \frac{1}{2r} \overset{2}{K}\, {}'\overline{g}_{\tau_2\mu_2} \underset{t}{\overline{\lambda}^{\mu_2}} g_{ab} \xi^a_\alpha \xi^b_\beta, \tag{12}$$

$(\rho_1, \sigma_1, \tau_1, \mu_1 = 1, 2, \dots, m_1)$; $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2, \mu_2 = 1, 2, \dots, m_2)$, где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, $\underset{t_1}{b_{\alpha\beta}}$, $\underset{t_2}{b_{\alpha\beta}}$, $\underset{t}{b_{\alpha\beta}}$ — вторые тензоры X_m; $'g_{\rho_1\sigma_1}$ — метрический тензор, $'\underset{t_1}{b_{\rho_1\sigma_1}}$ — вторые тензоры, $\overset{*}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1\sigma_1}$ — коэффициенты связности $'X_{m_1}$; $'\bar{g}_{\rho_2\sigma_2}$ — метрический тензор, $\underset{t_2}{\bar{b}_{\rho_2\sigma_2}}$ — вторые тензоры, $\overset{*}{\bar{G}}{}^{\tau_2}_{\rho_2\sigma_2}$ — коэффициенты связности $'\bar{X}_{m_2}$; векторы $\underset{t}{\lambda}{}^{\rho_1}$ и $\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\rho_2}$ удовлетворяют уравнениям

$$\underset{t}{\lambda}{}^{\rho_1}\,'g_{\rho_1\sigma_1} + \underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\rho_2}\,'\bar{g}_{\rho_2\sigma_2} = 0, \tag{13}$$

$$\underset{t}{\lambda}{}^{\rho_1}\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\,'g_{\rho_1\sigma_1} + \underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\rho_2}\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2}\,'\bar{g}_{\rho_2\sigma_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq s \\ 1, & \text{если } t = s \end{cases} \tag{14}$$

а величины $\overset{\tau_1}{K}$, $\overset{\tau_2}{\bar{K}}$, $\underset{t_1}{H}$, $\underset{t_2}{\bar{H}}$ определяются из уравнения

$$g^{ad}\frac{\partial p}{\partial u^d} = \overset{\tau_1}{K}\,'\xi^a_{\tau_1} + \overset{t_1}{H}\underset{t_1}{\nu}{}^a, \tag{15}$$

$$g^{\bar{a}\bar{d}}\frac{\partial r}{\partial u^{\bar{d}}} = \overset{\tau_2}{\bar{K}}\,'\xi^{\bar{a}}_{\tau_2} + \overset{t_2}{\bar{H}}\underset{t_2}{\nu}{}^{\bar{a}}. \tag{16}$$

Используя эти формулы доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Первая (вторая) внутренняя проекция является омбилическим многообразием для нормали типа* $(0, \underset{t_2}{\nu}{}^{\bar{a}})$, $((\underset{t_1}{\nu}{}^a, 0))$.

Теорема 3. *При изгибании проекций* $'X_{m_1}$ *и* $'\bar{X}_{m_2}$ *поверхность* X_m *также изгибается, причем так, что остается неизменной в подпространстве* $V_{m_1+m_2}$ *пространства* V_n, *являющемся топологическим произведением этих проекций.*

Отметим, что теоремы 2 и 3 были доказаны в работе [1] для поверхности X_m, вложенной в приводимое пространство. Оказалось, что эти теоремы справедливы и в том случае, когда поверхность X_m вложена в V_n с метрикой (1).

3. Если $m_1 + m_2 = m$, то поверхность X_m назовем бицилиндрической, или бицилиндром индекса (m_1, m_2). Уравнения бицилиндрической поверхности можно привести к виду

$$u^a = u^a(v^i),\ u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^{\bar{i}})\ (i = 1, 2, \dots, m_1);\ (\bar{i} = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m).$$

Нормальные векторы такой поверхности будут только типа $(\underset{t_1}{\nu}{}^a, 0)$ и $(0, \underset{t_2}{\nu}{}^{\bar{a}})$. Из (9), (10) и (11) получим формулы, выражающие связь между метрическими и вторыми тензорами поверхностей X_m, $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$.

Запишем эти формулы в системе координат $(v^i, v^{\bar{i}})$

$$g_{ij} = 'g_{ij},\quad g_{i\bar{j}} = 0,\quad g_{\bar{i}\bar{j}} = '\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}},$$

$$b_{\underset{1}{ij}} = {}'b_{\underset{1}{ij}}, \quad b_{\underset{1}{i\bar{j}}} = 0, \quad b_{\underset{1}{\bar{i}\bar{j}}} = -\frac{1}{2p}\underset{1}{H} g_{\bar{i}\bar{j}},$$

$$b_{\underset{2}{ij}} = -\frac{1}{2r}\underset{2}{\bar{H}} g_{ij}, \quad b_{\underset{2}{i\bar{j}}} = 0, \quad b_{\underset{2}{\bar{i}\bar{j}}} = {}'\bar{b}_{\underset{2}{\bar{i}\bar{j}}},$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, m_1); \ (\bar{i}, \bar{j} = m_1+1, m_1+2, \ldots, m).$$

Используя эти формулы доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. *Поверхность X_m есть (Кч.—Кч.) композиции.*

Теорема 5. *Для того, чтобы поверхность X_m была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее проекции $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$ были вполне геодезическими и векторы $\frac{\partial p}{\partial u^{\bar{a}}}$ и $\frac{\partial r}{\partial u^{a}}$ принадлежали соответственно поверхностям $'X_{m_1}$ и $'X_{m_2}$.*

Теорема 6. *Для нормали $(\underset{1}{\nu^a}, 0)$ $((0, \underset{2}{\nu^{\bar{a}}}))$ $m_1(m_2)$ линии кривизны поверхности X_m совпадают с линиями кривизны поверхности $'X_{m_1}$ $('\bar{X}_{m_2})$ для нормали $\underset{1}{\nu^a}$ $(\underset{2}{\nu^{\bar{a}}})$, и остальные m_2 (m_1) линии кривизны лежат на поверхности $'\bar{X}_{m_2}$ $('X_{m_1})$, которая есть омбилическое многообризие для этой нормали.*

Теорема 7. *Для того, чтобы X_m была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы ее проекции $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$ были минимальными и векторы $\frac{\partial p}{\partial u^{\bar{a}}}$ и $\frac{\partial r}{\partial u^{a}}$ принадлежали соответственно поверхностям $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$.*

Пусть Г—некоторая линия на поверхности X_m. Ее проекцию на $'X_{m_1}$ $('\bar{X}_{m_2})$ обозначим через $'\Gamma$ $('\bar{\Gamma})$.

Теорема 8. *Если две из линий Г, $'\Gamma$ и $'\bar{\Gamma}$ асимптотические и векторы $\frac{\partial p}{\partial u^{\bar{a}}}$ и $\frac{\partial r}{\partial u^{a}}$ принадлежат соответственно поверхностям $'X_{m_1}$ и $'\bar{X}_{m_2}$, то третья также будет асимптотической.*

Теорема 9. *Проекция $'\Gamma$ $('\bar{\Gamma})$ геодезической линии Г поверхности X_m будет геодезической для поверхности $'X_{m_1}$ $('\bar{X}_{m_2})$ тогда и только тогда, когда вектор $\frac{\partial p}{\partial v^i}$ $\left(\frac{\partial r}{\partial v^i}\right)$ направлен по ее касательной.*

4. Если $m_1 = m_2 = m$, то существует взаимнооднозначное соответствие попарно между поверхностями X_m, $'X_m$ и $'\bar{X}_m$. Уравнения такой поверхности можно привести к виду $u^a = u^a(v^\rho)$, $u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\rho)$ $(\rho = 1, 2, \ldots, m)$, где $u^a = u^a(v^\rho)$—уравнения $'X_m$, а $u^{\bar{a}} = u^{\bar{a}}(v^\rho)$—уравнения $'\bar{X}_m$. Свойства такой поверхности X_m зависят как от свойства ее проекций $'X_m$ и $'\bar{X}_m$, так и от характера соответствия между этими проекциями. Рассмотрим поверхность X_m в подпространстве V_{2m}

пространства V_n, являющемся топологическим произведением ее проекций $'X_m$ и $'\overline{X}_m$. Нормальные векторы X_m в V_{2m} будут только типа $(\underset{t}{\nu^a}, \underset{t}{\nu^{\bar a}})$ $(t=1, 2, \ldots, m)$.

Предполагая, что соответствие между $'X_m$ и $'\overline{X}_m$ конформное, то есть

$$'\overline{g}_{\rho\sigma} = \lambda' g_{\rho\sigma}, \tag{13}$$

для метрического тензора $g_{\rho\sigma}$ и вторых тензоров $\underset{t}{b}_{\rho\sigma}$ получим выражения

$$g_{\rho\sigma} = 'g_{\rho\sigma} + '\overline{g}_{\rho\sigma}, \tag{14}$$

$$\underset{t}{b}_{\rho\sigma} = \frac{1}{1+\lambda}\Big[g_{\rho\mu}(q_\sigma + l_\sigma - \overline{l}_\sigma) + g_{\sigma\mu}(q_\rho + l_\rho - \overline{l}_\rho) -$$

$$-g_{\rho\sigma}\left(q_\mu - \lambda l_\mu + \frac{1}{\lambda}\overline{l}_\mu\right)\Big]\underset{t}{\lambda^\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{15}$$

где

$$q_\sigma = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln\lambda}{\partial v^\sigma}, \quad l_\sigma = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln p}{\partial v^\sigma}, \quad \overline{l}_\sigma = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln r}{\partial v^\sigma}.$$

Используя формулы (14) и (15) доказаны следующие теоремы:

Теорема 10. *Если в* (13) $\lambda = c\dfrac{r}{p}$, *где* $c=\text{const}$, *то поверхность* X_m *в* V_{2m} *будет омбилической.*

Теорема 11. *Для t-ой нормали на поверхности X_m существует многообразие $m-2$ измерения, все направления которого являются главными для этой нормали. Эти направления ортогональны вектору $\underset{t}{\lambda^\sigma}$ и лежат на поверхности уровня функции* $\dfrac{\lambda p}{r}$.

Теорема 12. *Если две из поверхностей X_m, $'X_m$ и $'X_m$ находятся в конформном (аффинном) соответствии, то и третья находится в конформном (афинном) соответствии с каждой из них.*

Теорема 13. *Если $r=p$, а поверхности $'X_m$ и $'\overline{X}_m$ находятся в аффинном соответствии, то X_m в V_{2m} будет омбилической.*

Теорема 14. *Если $r=p$, а в (13) $\lambda=1$, то поверхность X_m в V_{2m} будет вполне геодезической.*

Теорема 15. *Если $r=p$, а в (13)* $\lambda = \dfrac{1+cp^{\frac{2m}{m-2}}}{1-cp^{\frac{2m}{m-2}}}$, *где* $c=\text{const}$, *то поверхность X_m в V_{2m} будет минимальной.*

Теорема 16. *Если $r=e^{2\varphi}p$, а поверхности $'X_m$ и $'\overline{X}_m$ находятся в конформном соответствии с вектором конформного преобразования φ_σ, то поверхность X_m в V_{2m} будет омбилической.*

Ереванский государственный университет

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

Մակերևույթները մի քանի ռիմանյան շերտավորող տարածությունների մեջ

Աշխատանքում խնդիր է դրվում ուսումնասիրել m չափի X_m մակերևույթի հատկությունները այնպիսի ռիմանյան V_n տարածության մեջ, որի մետրիկան կարելի է բերել

$$ds^2=r(u^c,\ u^{\bar c})\underset{1}{g}_{ab}(u^d)du^a du^b+p(u^c,\ u^{\bar c})\underset{2}{g}_{\bar a\bar b}(u^{\bar d})du^{\bar a}du^{\bar b} \tag{1}$$

$$(a,\ b,\ c,\ d=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1);\quad (\bar a,\ \bar b,\ \bar c,\ \bar d=n_1+2,\ \ldots,\ n)$$

տեսքի։ Նախ տրված է (1) մետրիկայով V_n տարածության երկրաչափական բնութագիրը, որը հնարավորություն է տվել ([3–5]) աշխատանքներում կատարված մեթոդը կիրառելու նշված խնդիրը լուծելիս։ Այնուհետև տրվում է մակերևույթի պրոյեկցիաների սահմանումները և գտնվում է մակերևույթի ու նրա պրոյեկցիաների հիմնական մեծությունների միջև գոյություն ունեցող կապերը արտահայտող բանաձևերը։ Օգտվելով այդ բանաձևերից ապացուցված է, որ X_m մակերևույթը (1) մետրիկայով V_n տարածության մեջ օժտված է մի շարք հատկություններով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. И. Кручкович*. ДАН СССР, 108, (1956). [2] *Г. И. Кручкович*. ДАН СССР (1957). [3] *Л. А. Матевосян*, «Известия АН Арм. ССР», Математика, т. 1, № 6 (1966). [4] *Л. А. Матевосян*, «Известия АН Арм. ССР», Математика, т. 2, № 2 (1967). [5] *Л. А. Матевосян*, ДАН Арм. ССР, XLVI, № 2 (1968). [6] *Е. К. Леонтьев*, «Известия вузов», Математика, № 4, 1964. [7] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, Гос.-изд. тех. и-теорет. лит. М.—Л., 1950.