ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVIII 1974 4

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

П. Э. Мелик-Адамян

О свойствах S-матрицы канонических дифференциальных уравнений на всей оси

(Представлено чл.-кор. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 8/II 1974)

Для канонического дифференциального уравнения

$$J_0 \frac{dX}{dr} = \lambda X + V(r)X \quad (0 \leq r < \infty), \tag{1}$$

где $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, потенциал V эрмитов, суммируем, $V \in L_1^{(2n\times 2n)}(0,\infty)$ и нормализован, т. е. $J_0 V = -VJ_0$, в работе [1] были получены необходимые и достаточные условия на $(n \times n)$ — матрицу — функцию $S(\lambda)$ для того, чтобы она была S — матрицей этого уравнения.

Свойства S — матрицы одномерного уравнения Шредингера

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (-\infty < x < \infty)$$

были исследованы в [2] для случая, когда вещественный потенциал $q(x)$ кусочно-непрерывен и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x)|dx < \infty. \tag{2}$$

В нашей заметке получены необходимые и достаточные условия на S — матрицу канонического уравнения вида (1) на всей оси и, как частный случай, описаны свойства S — матрицы уравнения Шредингера размерности n

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3}$$

для некоторого класса эрмитовых потенциалов Q.

1. Пусть J — $(2n \times 2n)$ — матрица со свойствами $J^* = -J$, $J^2 = I_{2n}$. Тогда матрицы $P_\pm = \frac{1}{2}(I_{2n} \pm iJ)$ являются ортогональными проекторами на подпространства $N_\pm = \{h;\ Jh = \pm ih\}$, причем $J = iP_+ - iP_-$, $I_{2n} = P_+ + P_-$.

В дальнейшем предполагается, что

$$dim\ N_+ = dim\ N_- . \tag{4}$$

Рассмотрим каноническое дифференциальное уравнение

$$J\frac{dX}{dr} = \lambda X + V(r)X \quad (-\infty < r < \infty), \tag{5}$$

где $V(r)$ — эрмитова $(2n\times 2n)$ — матрица—функция, суммируемая на всей оси, $V\in L_1^{(2n\times 2n)}(-\infty,\infty)$. Не ограничивая общности, будем предполагать ([3]), что потенциал V нормализован. Под $X(r,\lambda)$ будем понимать матрицу—функцию порядка $(2n\times n)$.

Уравнение (5) эквивалентно уравнению вдвое большей размерности на полуоси $(0,\infty)$

$$\mathbf{J}\frac{d\mathbf{X}}{dr} = \lambda\mathbf{X} + \mathbf{W}(r)\mathbf{X} \quad (0\le r<\infty) \tag{6}$$

с самосопряженным граничным условием в нуле ([4]),

$$X_1(0,\lambda) = X_2(0,\lambda), \tag{7}$$

где $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J & 0\\ 0 & -J\end{pmatrix}$, $\mathbf{W}(r)=\begin{pmatrix} V_+(r) & 0\\ 0 & V_-(r)\end{pmatrix}$, $V_\pm(r)=V(\pm r)$ $(r>0)$ и

$\mathbf{X}(r,\lambda)=\begin{pmatrix}X_1(r,\lambda)\\ X_2(r,\lambda)\end{pmatrix}$ — матрица—функция порядка $(4n\times 2n)$.

Очевидно, $\mathbf{J}^* = -\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^2=-I_{4n}$, $\mathbf{W}(r)$ — эрмитова, суммируемая $\mathbf{W}\in L_1^{(4n\times 4n)}(0,\infty)$ и $\mathbf{J}\mathbf{W}=-\mathbf{W}\mathbf{J}$.

Через $E(r,\lambda)$ обозначим матрицант уравнения (6), т. е. матричное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $E(0,\lambda)=I_{4n}$, а через $E_0(r,\lambda)(=e^{\mathbf{J}\lambda r})$ — матрицант уравнения (6_0), получающегося из (6) при $\mathbf{W}(r)=0$. Из эрмитовости потенциала $\mathbf{W}$ следует, что при $\operatorname{Im}\lambda=0$ матрица—функция $E(r,\lambda)$ $\mathbf{J}$—унитарна, т. е. $E^*\mathbf{J}E = E\mathbf{J}E^* = \mathbf{J}$. При $\operatorname{Im}\lambda=0$ существует матрица—функция $A(\lambda)=\lim\limits_{r\to\infty} E_0^{-1}(r,\lambda)E(r,\lambda)$ и из $\mathbf{J}$—унитарности $E(r,\lambda)$ следует $\mathbf{J}$—унитарность $A(\lambda)$. Матрица—функция $A^{-1}(\lambda) = -\mathbf{J}A^*(\lambda)\mathbf{J}$ называется матрицей асимптотической эквивалентности (A—матрицей) уравнений (6) и (6_0). Она обладает тем свойством, что решения $X(r,\lambda)$ и $X_0(r,\lambda)$ уравнений (6) и (6_0) асимптотически эквивалентны ($X(r,\lambda)-X_0(r,\lambda)\to 0$ при $r\to\infty$), тогда и только тогда, когда $X(0,\lambda)=A^{-1}(\lambda)X_0(0,\lambda)$.

Пользуясь результатами работы ([3]), получаем

Предложение. Матрица—функция $A(\lambda)$ блочно—диагональна, т. е. $A(\lambda)=\begin{pmatrix}A_+(\lambda) & 0\\ 0 & A_-(\lambda)\end{pmatrix}$, где

$$A_\pm(\lambda) = I_{2n} + \int_0^\infty e^{\pm 2J\lambda t}\Gamma_\pm(t)\,dt, \quad \Gamma_\pm(t)\in L_1^{(2n\times 2n)}(0,\infty). \tag{8}$$

Матрицы—функции $A_\pm(\lambda)$ J—унитарны.

Из характеристического свойства A—матрицы следует существование решения $X(r,\lambda)$ задачи (6)–(7), допускающего асимптотику

$$X(r,\lambda)=e^{i\lambda r}\begin{pmatrix}P_-\\P_+\end{pmatrix}S(\lambda)+e^{-i\lambda r}\begin{pmatrix}P\\P_-\end{pmatrix}+0(1)\quad(r\to\infty) \tag{9}$$

где

$$S(\lambda)=G_-(\lambda)G_+^{-1}(\lambda) \tag{10}$$

$(2n\times 2n)$ —матрица-функция, а $G(\lambda)=P A(\lambda)+P A_-(\lambda)$.

Матрицу-функцию $S(\lambda)$ назовем S—матрицей уравнения (5). Заметим, что $S(\lambda)$ совпадает с субоператором ([3]) оператора $S(L,L_0)$, где $S(L,L_0)$ —оператор рассеяния для пары самосопряженных в $L_2^{(2n\times 1)}(-\infty,\infty)$ операторов

$$L=J\frac{d}{dr}+V(r),\ L_0=J\frac{d}{dr}.\quad(-\infty<r<\infty)$$

Из (8) видно, что

$$G_\pm(\lambda)=I_{2n}+\int_0^\infty e^{\pm 2i\lambda t}[P\Gamma(t)+P_+\Gamma_-(t)]\,dt, \tag{11}$$

т. е. $G_\pm(\lambda)$ принадлежат винеровским классам функций $R_\pm$ соответственно. Оказывается, что

$$\det G_\pm(\lambda)\neq 0\quad\text{при }\lambda\in\Pi_\pm, \tag{12}$$

где $\Pi_\pm$ —верхняя и нижняя полуплоскости. Это означает, что $G^{-1}_\pm(\lambda)\in R_\pm$. Следовательно, выражение (10) является правой канонической факторизацией (факторизацией с нулевыми частными индексами ([5])), матрицы-функции $S(\lambda)$.

Из J—унитарности $A_\pm(\lambda)$ вытекают соотношения

$$G^*_+(\lambda)G_+(\lambda)=G^*_-(\lambda)G_-(\lambda) \tag{13}$$

$$G^*_+(\lambda)JG_+(\lambda)+G^*_-(\lambda)JG_-(\lambda)=2J \tag{14}$$

Условие (13) эквивалентно унитарности функции $S(\lambda)$.

2. Всюду в дальнейшем будем предполагать $J=J_0$, что не ограничивает общности в силу (4). Тогда нормализованный потенциал V имеет вид $V(r)=\begin{pmatrix}-B(r)&D(r)\\D(r)&B(r)\end{pmatrix}$, где $B(r)$, $D(r)$ —эрмитовы $(n\times n)$ —матрицы—функции.

Для уточнения необходимых свойств S—матрицы уравнения (5) и доказательства их достаточности, нам понадобится

Теорема 1. *Для того, чтобы некоторая J унитарная $(2n\times 2n)$ матрица-функция $A^{-1}(\lambda)$ была A—матрицей уравнения (5) с суммируемым нормализованным потенциалом, необходимо и* *достаточно, чтобы матрица—функция* $A(\lambda)$ *допускала представление*

$$A(\lambda)=I_{2n}+\int_0^\infty e^{2i\lambda t}\Gamma(t)dt, \tag{15}$$

где $\Gamma(t)=\|\Gamma_{jk}(t)\|_1^2\in L_1^{(2n\times 2n)}(0,\infty)$ и

$$\det\left|I_n+\int_0^\infty e^{-2i\lambda t}(\Gamma_{jj}(t)\mp i\Gamma_{kj}(t))\,dt\right|\neq 0,\quad \lambda\in\overline{\Pi}_\pm,\ (j,k=1,2,\ j\neq k) \tag{16}$$

Необходимость представления (15) доказана в ([3]), а условие (16) проверяется анологично (12). Из (15) и (16) следует, что J—унитарная матрица—функция $A(\lambda)=\|A_{jk}(\lambda)\|_1^2$ однозначно определяется элементами $A_{11}(\lambda)$ и $A_{21}(\lambda)$.

Для доказательства достаточности, как и в ([4]), рассмотрим унитарную матрицу—функцию

$$S_1(\lambda)=[C_{22}(\lambda)+C_{21}(\lambda)][C_{12}(\lambda)+C_{11}(\lambda)]^{-1}=Q_+(\lambda)Q_-^{-1}(\lambda). \tag{17}$$

где $C(\lambda)=\|C_{jk}(\lambda)\|_1^2=UA(\lambda)U^*$, а $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & -iI_n \\ I_n & iI_n\end{pmatrix}$

Из (15) и (16) имеем $Q_\pm^{-1}(\lambda)\in R_\pm$. Следовательно выражение (17) является левой канонической факторизацией матрицы—функции $S_1(\lambda)$. Согласно работе ([1]), по $S_1(\lambda)$ определяются две эрмитовы матрицы—функции $B_1(r)$, $D_1(r)\in L_1^{(n\times n)}(0,\infty)$, такие, что S—матрица уравнения (1) с потенциалом $V_1(r)=\begin{pmatrix}-B_1(r) & D_1(r)\\ D_1(r) & B_1(r)\end{pmatrix}$ совпадает с $S_1(\lambda)$. Из единственности канонической факторизации ([5]) следует, что A—матрица этого уравнения совпадает с $A^{-1}(\lambda)$, что и требовалось.

Теперь заметим, что матрицы—функции $A^{-1}(\lambda)$ и $A^{-1}(-\lambda)$ в (8) являются A—матрицами уравнений вида (1) с потенциалами $\pm V_\pm(r)$. Поэтому функции $\Gamma_\pm(t)$ в формуле (8) удовлетворяют условию (16).

Положим

$$\widetilde{A}_\pm(\lambda)=P_\pm G_\pm(\lambda)+P_\mp G_-(\lambda). \tag{18}$$

В силу (13), (14) и (11) эти матрицы—функции J—унитарны и

$$\widetilde{A}_\pm(\lambda)=I_{2n}+\int_0^\infty e^{\pm 2i\lambda t}\Gamma_\pm(t)\,dt.$$

По теореме 1 $\tilde{A}_{\pm}^{-1}$ являются A—матрицами уравнений

$$\pm J\frac{dX}{dr} = \lambda X + \tilde{V}_{\pm}(r)X \quad (0 \leqslant r < \infty)$$

с суммируемыми нормализованными потенциалами $\tilde{V}_{\pm}$. Тогда матрица-функция $\tilde{A}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{+}^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{-}^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}$ оказывается A—матрицей уравнения

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \frac{dX}{dr} = \lambda X + \begin{pmatrix} \tilde{V}_{+} & 0 \\ 0 & \tilde{V}_{-} \end{pmatrix} X \; (0 \leqslant r < \infty)$$

Если положить $\tilde{V}(r) = \tilde{V}_{+}(r)$ при $r>0$ и $\tilde{V}(r) = \tilde{V}_{-}(-r)$ при $r<0$, то из (18) видно, что S—матрица уравнения (5) с потенциалом $\tilde{V}(r)$ совпадает с матрицей—функцей $S(\lambda)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы некоторая* $(2n \times 2n)$ — *матрица—функция* $S(\lambda)$ *была* S—*матрицей уравнения* (5) *с суммируемым нормализованным потенциалом, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям* (10)—(14) *и* (16).

3. Рассмотрим матричное уравнение Шредингера (3), где потенциал $Q(x)$—$(n \times n)$ —матрица—функция такая, что существует эрмитово решение $\Theta(x)$ задачи

$$-\Theta'(x) + \Theta^2(x) = Q(x), \quad \Theta(x) \in L_1^{(n \times n)}(-\infty, \infty)\,^{*} \tag{19}$$

Тогда вместо уравнения (3) можно рассматривать каноническое уравнение (5) с потенциалом $V_2(r) = \begin{pmatrix} 0 & \Theta(r) \\ \Theta(r) & 0 \end{pmatrix}$ в том смысле, что компонента $X_1(r,\lambda)$ решения $X(r,\lambda) = \begin{pmatrix} X_1(r,\lambda) \\ X_2(r,\lambda) \end{pmatrix}$ этого уравнения удовлетворяет уравнению (3).

Для уравнения (5) с потенциалом V_2 получаем

$$G_2(\lambda) = J_1 G_2(-\lambda) J_1, \tag{20}$$

где $J_1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$, т. е. $J_1 S(\lambda) = S^{*}(-\lambda) J_1$.

---

* Для потенциалов, удовлетворяющих условию (2) такие решения существуют.

Анализ процедуры восстановления потенциала по матрице—функции $S(\lambda)$ со свойствами (10)—(14), (16) и (20) показывает, что восстановленный потенциал имеет вид $\widetilde{V}_2(r) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{D}(r) \\ \widetilde{D}(r) & 0 \end{pmatrix}$.

S—матрица $S_2(\lambda)$ уравнения (3) [2] связана с S—матрицей $S(\lambda)$ соответствующего канонического уравнения унитарным преобразованием

$S_2(\lambda) = U_1 S(\lambda) U_1^*$, где $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что

$J_2 S_2(\lambda) = S_2^*(-\lambda) J_2$, где $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Сформулируем полученное

Следствие. Для того, чтобы некоторая $(2n \times 2n)$ —матрица —функция $S(\lambda)$ была S—матрицей уравнения (3) с потенциалом, удовлетворяющим условию (19), необходимо и достаточно, чтобы матрица—функция $U_1^* S(\lambda) U_1$, наряду с (10)—(14), (16), удовлетворяла условию (20).

Выражаю благодарность М. Г. Крейну за постановку задачи и В. М. Адамяну за обсуждение.

Ереванский государственный университет
Одесский инженерно-строительный институт

Գ. Է. ՄԵԼԻՔ-ԱԴԱՄՅԱՆ

Առանցքի վրա որոշված կանոնական դիֆերենցիալ հավասարման S-մատրիցի հատկությունների մասին

Դիտարկվում է հետևյալ հավասարումը՝

$$J\frac{dX}{dr} = \lambda X + V(r)X \quad (-\infty < r < \infty), \tag{5}$$

որտեղ $V(r)$-ն առանցքի վրա հանրագումարելի էրմիտյան մատրից-ֆունկցիա է ($V = V^*$, $V \in L_1^{2n \times 2n}(\infty, \infty)$), իսկ J-ն մատրից է $J^2 = -I_{2n}$, $J^* = -J$ հատկություններով։

Ապացուցվում է՝

Թեորեմ. Որպեսզի $S(\lambda)$ $(2n \times 2n)$ —մատրից ֆունկցիան հանդիսանա (5) հավասարման S-մատրից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա բավարարի (10)—(14) և (16) պայմաններին։

Հետևանք. Որպեսզի $S(\lambda)$ $(2n \times 2n)$-մատրից ֆունկցիան հանդիսանա (3) հավասարման S-մատրից, որի պոտենցիալը բավարարում է (19) պայմանին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա (10)–(14) և (16) պայմանների հետ մեկտեղ բավարարի նաև (20) պայմանին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, ДАН Арм. ССР, т. 46, № 4 (1968). [2] *Л. Д. Фаддеев*, Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 73, (1964). [3] *В. М. Адамян*, ДАН СССР, т. 178, № 1, (1968). [4] *М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик-Адамян*, Функц. анализ, 4, вып. 4 (1970). [5] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, УМН, т. XIII, вып. 2 (80), (1958).