ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVIII 1974 4

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Оганян

О случайной марковской раскраске плоскости двумя цветами

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 20/XII 1973)

Случайную раскраску плоскости в N цветов будем называть марковской, если при движении вдоль каждой прямой на плоскости чередование цветов составляет марковский процесс.

Случайная раскраска плоскости называется однородной (и изотропной), если она стохастически инвариантна относительно группы всех параллельных сдвигов (и вращений) на плоскости.

Вопрос о существовании однородной и изотропной марковской раскраски плоскости в два цвета возник в работах [1,2]. Первый пример такой раскраски построен в работе [3], где использовалось разбиение плоскости на выпуклые многоугольники пуассоновским процессом прямых. В работе [4] случайные поля прямых использовались для построения однородных (но не изотропных) марковских раскрасок плоскости в два цвета.

В настоящей работе строятся однородные и изотропные раскраски плоскости в два цвета, с криволинейными границами между цветами.

Будем искать случайные марковские раскраски в следующем классе раскрасок. Пусть $\{D_i\}$—последовательность независимых одинаково распределенных случайных выпуклых фигур на плоскости. $\{t_i\}$—случайное множество сдвигов, такое что $\{t_iO\}$ образуют однородное пуассоновское точечное поле на плоскости, где O любая фиксированная точка плоскости. Множество $\bigcup t_iD_i$ закрашивается черным цветом, а его дополнение на плоскости белым. Очевидно, таким образом получаемая раскраска плоскости целиком определяется распределением случайной выпуклой фигуры D и параметром пуассоновского точечного поля $\{t_iO\}$, который мы будем обозначать буквой μ.

По поводу понятия распределения случайной выпуклой фигуры D заметим следующее: если заранее предполагается, что с вероятностью единица $D\subset V$, где V есть класс выпуклых фигур, причем каждая фигура из V определяется конечным числом параметров, то D определяется заданием распределения в пространстве параметров. Другой способ построения случайных выпуклых фигур (точнее, многоугольников) состоит в использовании специальных стохастических конструкций [5].

Введем некоторые обозначения, связанные со случайными раскрасками рассматриваемого класса. Пусть $I_i = g \cap t_i D_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где g прямая на плоскости; $L = \{I_i : I_i \neq \varnothing\}$, x_i — левый конец интервала I_i, $\Phi(h)$ — функция распределения произвольного интервала из L, $\varphi(h) = \frac{d}{dh}\Phi(h)$. На прямой g черным цветом оказывается закрашенным случайное множество $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, а белым $B = g/A$. Очевидно, имеют место представления $A = \bigcup J_k$, для любого k J_k есть интервал, $J_k \cap J_l = \varnothing$ при $k \neq l$.

$B = \bigcup J'_k$ — для любого k J'_k есть интервал $J'_k \cap J'_l = \varnothing$, при $k \neq l$. Обозначим через $\{J_k, J'_k\}$ чередующуюся последовательность черных и белых интервалов (рис. 1), возникающую на прямой g.

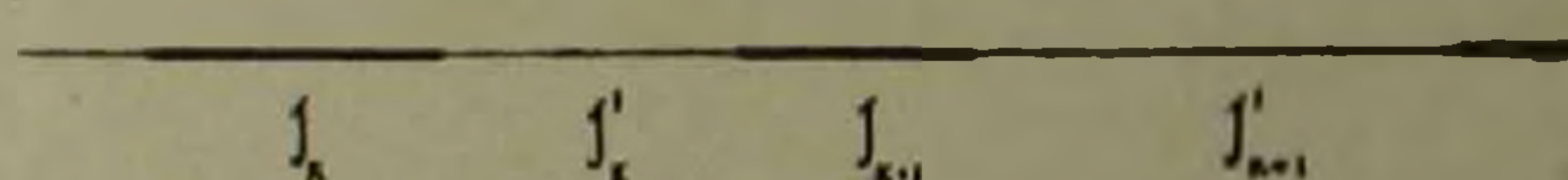

Рис. 1

П р е д л о ж е н и е 1. Если $\{D_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных выпуклых фигур, а $\{t_i\}$ — пуассоновское множество сдвигов, то:

а) $\{x_i\}_1^{\infty}$ есть пуассоновское случайное точечное поле на g.

б) В чередующейся последовательности $\{J_k, J'_k\}$ интервалы независимы, а длина произвольного интервала из $\{J'_k\}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром равным интенсивности точечного поля $\{x_i\}$.

Следовательно, для того, чтобы возникающий на прямой случайный процесс был бы марковским, необходимо и достаточно чтобы $G(x)$ имела бы вид $G(x) = 1 - e^{-ax}$, где G — функция распределения произвольного интервала из $\{J_k\}$.

Найдем связь между G и Φ. Обозначим через Θ интенсивность пуассоновского точечного поля $\{x_i\}_1^{\infty}$. Связь между G и Φ определяется уравнением Г. Маттерона.

$$e^{-\Theta U(h)} + \Theta \cdot \int_0^h e^{-\Theta U(h-x)} \cdot [1 - G(x)]\,dx = 1, \qquad (1)$$

где $U(h) = \int_0^h [1 - \Phi(x)]\,dx$.

Это уравнение легко решается с помощью преобразования Лапласа. В частном случае, когда $G(x) = 1 - e^{-ax}$, $\Phi(x)$ имеет вид

$$1 - \Phi(x) = \frac{(a+\Theta)\cdot e^{-(a+\Theta)\cdot x}}{a+\Theta\cdot e^{-(a+\Theta)\cdot x}}. \tag{2}$$

Следовательно, для того, чтобы функция распределения произвольного интервала из $\{J_k\}$ была бы экспоненциальной, $\Phi(x)$ должна иметь вид (2) и плотность $M(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x)$

$$M(x) = \frac{a\cdot(a+\Theta)^2\cdot e^{-(a+\Theta)\cdot x}}{[a+\Theta\cdot e^{-(a+\Theta)\cdot x}]^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим два частных случая построения последовательности $\{J_k, J_k\}$ с помощью конкретного выбора D и μ.

1. Пусть ξ случайная величина с плотностью распределения $f(r)$. Положим $D = K(\xi)$, где $K(r)$ — круг радиуса r. Найдем связь между f и Φ. Легко видеть, что

$$1 - \Phi(h) = \frac{1}{2\cdot r_0}\int_{h/2}^{\infty} f(r)\sqrt{4r^2-h^2}\cdot dr, \tag{4}$$

где r_0 — средний радиус круга.

Дифференцируя (4) по h находим

$$\varphi(h) = \frac{h}{2r_0}\int_{h/2}^{\infty}\frac{f(r)}{\sqrt{4r^2-h^2}}dr. \tag{5}$$

Делая замену переменной $u = 4r^2$ и обозначая $f_1(u) = \frac{f(r)}{r}$, получаем

$$\frac{16\cdot r_0\cdot\varphi(h)}{h} = \int_{h^2}^{\infty}\frac{f_1(u)}{\sqrt{u-h^2}}\,du. \tag{6}$$

Это есть интегральное уравнение Абеля. Как известно, его решение имеет вид:

$$f(r) = -\frac{16\cdot r_0\cdot r}{\pi}\int_{4r^2}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)\frac{1}{\sqrt{z-4r^2}}\,dz. \tag{7}$$

Функция $f(r) \geq 0$ если $\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right) \leq 0$, т. е. если $\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} \leq 0$ из (7) находим

$$\int_0^{\infty} f(r)dr = -\frac{4r_0}{\pi}\left(\varphi(0) - \int_0^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right).$$

Таким образом, для того, чтобы решение уравнения (5) являлось плотностью распределения, $\varphi(x)$ должна удовлетворять следующим двум условиям:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\, dt < \infty, \tag{8}$$

$$\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} < 0. \tag{9}$$

Из (3) видно, что $M(0)=0$ при $a=0$. Следовательно, условие (8) не выполнено. Таким образом, не существует такой плотности распределения радиусов кругов, для которой плотность распределения произвольного интервала из L имела бы вид (3).

П. Майлсом ([7]) предложена стохастическая конструкция случайного многоугольника П, обладающего следующими свойствами: Если $\{П_i\}$—последовательность независимых многоугольников Майлса, то случайное расположение $\{t_i П_i\}_1^\infty$, оказывается однородным изотропным. (Здесь $\{t_i\}$—пуассоновское множество сдвигов) и в этом случае $\Phi(h)=1-e^{-\lambda h}$.

Заметим, что многоугольник П стохастически эквивалентен так называемому „произвольному многоугольнику" из числа тех, на которые плоскость разбивается пуассоновским случайным полем прямых. Предложенная Майлсом конструкция позволяет обойти сложности, связанные в этом случае с понятием „произвольный многоугольник".

В качестве случайной фигуры D выберем смесь фигур П и $K(\xi)$: именно, произведем независимое испытание с вероятностью успеха p и неуспеха $1-p$. В случае успеха полагаем $D=П$, а в случае неуспеха полагаем $D=K(\xi)$.

Рассмотрим соответствующую последовательность интервалов $\{J_k, J'_k\}$.

Пусть заданы произвольные Θ и q, $\Theta>0$, $0<q<1$. Очевидно, что за счет выбора интенсивности μ можно параметр распределения длины произвольного интервала из $\{J'_k\}$ сделать равным Θ. Выбором p можно добиться, чтобы плотность распределения длины произвольного интервала из $\{J_k\}$ имела бы вид

$$\varphi(x)=(1-q)\cdot\varphi_1(x)+q\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \tag{10}$$

Здесь и ниже $\varphi_1(x)$ плотность распределения длины произвольного интервала из класса $\{I_i : I_i \neq \varnothing,\ I_i = g\cap t_i K(\xi_i)\}$. Следует выяснить, существует ли плотность $f(r)$ распределения радиусов кругов такая, чтобы φ имела бы вид (3), т. е. чтобы

$$M(x)=(1-q)\cdot\varphi_1(x)+q\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}.$$

Вопрос сводится к тому, существует ли решение уравнения Абеля со свободным членом

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1-q} M(x) - \frac{q}{1-q} \lambda \cdot e^{-\lambda x},$$

являющееся плотностью распределения.

Мы видели, что для этого $\varphi_1(x)$ должна удовлетворять условиям (8) и (9), которые эквивалентны следующим двум условиям

$$q\lambda = a, \tag{11}$$

$$\frac{(a+\Theta)^3 \cdot e^{-(a+\Theta)x} \cdot [\Theta \cdot e^{-(a+\Theta)x} - a]}{[a+\Theta \cdot e^{-(a+\Theta)x}]^3} + \lambda \cdot e^{-\lambda x} - \frac{(a+\Theta)^2 \cdot e^{-(a+\Theta)x}}{x \cdot [a+\Theta \cdot e^{-(a+\Theta)x}]^2} + \frac{e^{-\lambda x}}{x} \leqslant 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что существует $\lambda_0 < \infty$ такое, что при $\lambda > \lambda_0$ неравенство (12) выполнено для всех $x > 0$.
Действительно, левая часть неравенства при $x = 0$ равна нулю, а ее первая производная по x в точке $x = 0$ отрицательна при всех $\lambda > \lambda_1$, $\lambda_1 < \infty$. Заметив также, что производная по λ отрицательна при всех $x > 0$, получаем, что существует $\delta > 0$, такое, что при любом $\lambda > \lambda_1$ в окрестности $(0, \delta)$ неравенство (12) выполнено. Очевидно, что существует $\lambda_2 < \infty$, такое, что при $\lambda > \lambda_2$ неравенство (12) выполнено при всех $x > \delta$. Следовательно, беря $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ получаем, что при $\lambda > \lambda_0$ неравенство (12) выполнено для всех $x > 0$.

Таким образом, однородные и изотропные черно-белые случайные марковкие раскраски можно получить, закрашивая черным цветом объединение случайных кругов и многоугольников, разбросанных по плоскости согласно пуассоновскому закону.

Замечание. Пусть $\mathfrak{M}(w)$ случайное поле волокон ([8]) G_n — класс гиперплоскостей в R^n. В работе ([8]) показано, что при $n \geq 4$, если $\mathfrak{M}(w)$ есть однородное и изотропное случайное поле волокон, а точечное поле $\mathfrak{M} \cap g$ является пуассоновским случайным точечным полем ($g \in G_n$), тогда с вероятностью единица $\mathfrak{M}(w)$ состоит из прямолинейных волокон.

В ([8]) отмечалось, что легко построить при всех $n \geq 2$ примеры однородного и изотропного $\mathfrak{M}(w)$ с прямолинейными волокнами, для которых $\mathfrak{M}(w) \cap g$ является пуассоновским точечным полем, однако указывалось на отсутствие примеров соответствующих $\mathfrak{M}(w)$ с криволинейными волокнами при $n = 2, 3$.

Результаты настоящей заметки доставляют отсутствовавший пример. Если положить $a = \Theta$, а в качестве однородного и изотропного поля волокон взять границы случайной раскраски, то точечный процесс пересечений с любой прямой окажется пуассоновским.

Автор выражает благодарность Р. В. Амбарцумяну за руководство работой.

Ереванский государственный университет

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Հարթության երկու գույնով մարկովյան պատահական գունավորման վերաբերյալ

Աշխատանքում կառուցվում են հարթության համասեռ և իզոտրոպ երկու գույնով մարկովյան գունավորումներ, գույների միջև կորագիծ սահմաններով։

Երկու գույնով մարկովյան պատահական գունավորումները փնտրվում են հետևյալ գունավորումների դասում։

Դիցուք $\{D_i\}$*-ն հարթության վրա անկախ միատեսակ բաշխման պատահական ուռուցիկ պատկերների հաջորդականություն է,* $\{t_i\}$*-ն տեղաշարժումների պուասոնյան բազմություն է.* $\bigcup t_iD_i$ *բազմությունը ներկվում է սև, իսկ նրա լրացումը հարթության վրա՝ սպիտակ։*

Աշխատանքում, դիտողության կարգով բերված է նաև կորագիծ թելիկներով հարթության վրա համասեռ և իզոտրոպ պատահական թելիկների դաշտի օրինակ, որի համար $m(w)\cap g$ *կետային դաշտը հանդիսանում է՝ պուասոնյան կետերի դաշտ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. C. Pielou*, Biometrics, 20, 156–167, 1964. [2] *M. C. Bartlett*, Biometrics, 20, 891—892, 1964. [3] *P. Switzer*, Ann. Math. Statist., 36, 1859–1863 (1965). [4] *H. Solomon and P. Wang*. Proc. Sixth Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability. [5] *R. E. Miles*, Alvances in mathematics, 10, 256–290 (1973). [6] *Р. В. Амбарцумян*, ДАН СССР, т. 214, № 2 (1974).