ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVIII 1974 3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян

О применимости одной теоремы неявных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/XI 1973)

В теории неявных функций часто используется подготовительная теорема Вейерштрасса ([1,2]). Обычно указываются лишь неконкретные достаточные условия применимости этой теоремы. Здесь доказывается более общая теорема. Из нее с помощью теоремы Руше легко находятся конкретные достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия применимости.

Теорема 1. *Пусть $f(p, \mu)$—голоморфная функция от переменных p, μ при $p\in D_1$, $\mu\in D_2$. Здесь D_1, D_2—ограниченные замкнутые области соответственно с границами Γ_1, Γ_2, причем граница Γ_1 предполагается спрямляемой. Если при $p\in\Gamma_1$, $\mu\in D_2$ выполняется условие*

$$f(p, \mu)\neq 0, \tag{1}$$

то функция $f(p, \mu)$ может быть разложена на множители вида

$$f(p, \mu)=[b_0(\mu)+pb_1(\mu)+\ldots+p^{n-1}b_{n-1}(\mu)+p^n]\varphi(p, \mu), \tag{2}$$

где $b_s(\mu)$ $(s=0, 1, \ldots, n-1)$—функции голоморфные при $\mu\in D_2$, а $\varphi(p, \mu)$—функция голоморфная при $p\in D_1$, $\mu\in D_2$ не обращается в нуль.

Доказательство. Возьмем $\mu_0\in D_2$. Пусть функция $f(p, \mu_0)$ имеет n нулей в области D_1. Ясно, что n—конечное число. В силу условия (1), при всех $\mu\in D_2$ функция $f(p, \mu)$ будет иметь n нулей: $p_1(\mu), \ldots, p_n(\mu)$, которые непрерывно зависят от μ. Для суммы s-ых степеней корней $p_k(\mu)$ имеем известные формулы

$$m_s(\mu)=\sum_{k=1}^{n}[p_k(\mu)]^s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}p^s\,\frac{\partial f(p, \mu)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{f(p, \mu)}\quad (s=0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

В силу условия (1) функции $m_s(\mu)$ будут голоморфными функциями от μ. Построим многочлен n-ой степени

$$Q(p, \mu)=b_0(\mu)+pb_1(\mu)+\ldots+p^{n-1}b_{n-1}(\mu)+p^n.$$

имеющий корни $p_k(\mu)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Для вычисления коэффициентов $b_s(\mu)$ можно использовать известные формулы Ньютона ([3]) при $b_n(\mu)\equiv 1$:

$$\sum_{k=1}^{s} m_k(\mu) b_{n+k-s}(\mu) + s b_{n-s}(\mu) = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Из них вытекает голоморфность коэффициентов $b_s(\mu)$ $(s=0, 1, \ldots, n-1)$. Так как функция

$$\varphi(p, \mu) = \frac{f(p, \mu)}{Q(p, \mu)}$$

голоморфна при $p \in D_1$, $\mu \in D_2$ и не обращается в нуль, то это окончательно доказывает теорему.

Замечание 1. Голоморфную зависимость от μ можно везде в теореме заменить непрерывной зависимостью от μ.

Замечание 2. Условие (1) является не только достаточным, но и необходимым для справедливости разложения (2).

Замечание 3. Области D_1, D_2 могут быть неодносвязными.

Замечание 4. В теореме можно вместо μ взять несколько параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

Из теоремы 1 и теоремы Руше ([3]) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(p, \mu)$—голоморфная функция от переменных p, μ при $p \in D_1$, $\mu \in D_2$, где D_1, D_2—ограниченные замкнутые области с границами Γ_1, Γ_2. Пусть при некотором значении $\mu_0 \in D_2$ функция $f(p, \mu_0)$ внутри области D_1 имеет n корней. Если при $p \in \Gamma_1$, $\mu \in D_2$ выполняется неравенство*

$$|f(p, \mu_0)| > |f(p, \mu) - f(p, \mu_0)|, \tag{5}$$

то функция $f(p, \mu)$ может быть разложена на множители вида (2).

Доказательство следует из условия (1), которое вытекает из неравенства (5).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$p^n + \mu\Psi(p, \mu) = 0, \tag{6}$$

где $\Psi(p, \mu)$—голоморфная функция от p, μ при

$$|p| \leqslant \rho, \quad |\mu| \leqslant r. \tag{7}$$

Предполагаем, что в кругах (7) функция $\Psi(p, \mu)$ ограничена:

$$|\Psi(p, \mu)| \leqslant M = \text{const}.$$

Поэтому при выполнении условий

$$|\mu| < \min\{r, \rho^n M^{-1}\}, \quad |p| < \rho$$

будет справедливо разложение на множители

$$p^n + \mu\Psi(p, \mu) = \left(p^n + \mu \sum_{s=0}^{n-1} b_s(\mu) p^s\right) \varphi(p, \mu), \quad \varphi(p, \mu) \neq 0.$$

и уравнение (6) может быть сведено к алгебраическому относительно p уравнению

$$p^n+\mu\sum_{s=0}^{n-1} b_s(\mu)\, p^s=0.$$

С помощью теоремы 2 уточним некоторые известные формулировки теоремы Вейерштрасса ([2,4]).

Теорема 3. *Пусть известно, что функция $f(p, \mu)$ — голоморфна при*

$$|p|\leqslant\rho,\quad |\mu|\leqslant r$$

и ограничена там по модулю

$$|f(p, \mu)|\leqslant M=\mathrm{const}.$$

Пусть выполняются условия

$$f(0,0)=0,\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial p}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} f(0,0)}{\partial p^{n-1}}=0,\quad \frac{\partial^n f(0,0)}{\partial p^n}=a\neq 0. \tag{8}$$

Если выполнены условия

$$|p|\leqslant\alpha\rho,\quad |\mu|\leqslant\beta r, \tag{9}$$

где положительные коэффициенты α, β удовлетворяют неравенствам

$$\beta<\frac{\delta}{1+\delta},\quad \alpha<\frac{\delta(1-\beta)-\beta}{\delta(1-\beta)+\beta^{-n}},\quad \delta=\frac{\rho^n a}{n!\,M}, \tag{10}$$

то имеет место разложение на множители

$$f(p, \mu)=[b_0(\mu)+pb_1(\mu)+\ldots+p^{n-1}b_{n-1}(\mu)+p^n]\varphi(p, \mu),\quad \varphi(p, \mu)\neq 0$$

Коэффициенты $b_s(\mu)$ $(s=0, 1, \ldots, n-1)$ и функция $\varphi(p, \mu)$ голоморфны в области (9).

Доказательство. Функция $f(p, \mu)$ можно представить в виде

$$f(p, \mu)=\frac{a}{n!}p^n+\Psi(p, \mu),$$

где для функции $\Psi(p, \mu)$ выполняется мажорантное неравенство

$$\Psi(p, \mu)\ll\frac{M}{\left(1-\frac{p}{\rho}\right)\left(1-\frac{\mu}{r}\right)}-\frac{M\left(1-\frac{p^{n+1}}{\rho^{n+1}}\right)}{1-\frac{p}{\rho}}.$$

Неравенство (5) примет вид

$$\alpha^n>\frac{Mn!(\beta+\alpha^{n+1})}{a\rho^n(1-\beta)(1-\alpha)}.$$

Оно выполняется в силу неравенств (10). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть известно, что* $f(p, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ — *функция голоморфная при*

$$|p| \leqslant \rho, \quad |\mu_1| \leqslant r_1, \ \ldots, \ |\mu_m| \leqslant r_m$$

и ограниченная там по модулю

$$|f(p, \mu_1, \ldots \mu_m)| \leqslant M = \text{const}.$$

Пусть имеем разложение

$$f(p, 0, \ldots, 0) = a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + \ldots .$$

Если выполнены условия (11)

$$|p| \leqslant \alpha\rho, \qquad |\mu_1| < \frac{\beta r_1}{m}, \ \ldots, \ |\mu_m| < \frac{\beta r_m}{m},$$

где положительные коэффициенты α, β *удовлетворяют неравенствам*

$$\beta < \frac{\delta}{1+\delta}, \qquad \alpha < \frac{\delta(1-\beta)-\beta}{\delta(1-\beta)+\beta^{-n}}, \qquad \delta = \frac{\rho^n a_n}{M}, \tag{12}$$

то имеет место разложение на множители

$$f(p, \mu_1, \ldots, \mu_m) = (b_0 + pb_1 + \ldots + p^{n-1} b_{n-1} + p^n)\varphi(p, \mu_1, \ldots, \mu_m).$$

Здесь $f(p, \mu_1, \ldots, \mu_m)(s=0, 1, \ldots, n-1)$, $\varphi(p, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ — *голоморфные функции в области* (11), *и* $\varphi(p, \mu_1, \ldots, \mu_m)$.

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущей.

Формулировки этих теорем отличаются от приводимых в ([1,2,4]) тем, что указываются конкретные достаточные условия (9), (10), (11), (12).

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Կ. Դ. ՎԱԼԵԵՎ, Ի. Ռ. ԿԱՐԴԱՆՅԱՆ

Անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության մի թեորեմի կիրառելիության մասին

Բերված են անբացահայտ ֆունկցիան արտադրիչների վերլուծելու վերաբերյալ Վեյերշտրասի Vorbereitungsatz *թեորեմն ընդհանրացնող մի քանի թեորեմների ապացույցները։ Ռուշեյի թեորեմի օգտագործմամբ որոշվում են այդ թեորեմների կիրառելիության համար կոնկրետ բավարար և, մի շարք դեպքերում նաև, անհրաժեշտ պայմանները։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Гурса*, Курс математического анализа, ГТТИ, т. II, ч. 1, М.—Л., 1933. [2] *А. И. Маркушевич*, Теория аналитических функций, Изд. «Наука», т. I, М., 1967. [3] *К. Поссе*, Курс дифференциального и интегрального исчислений, С.-Петербург, 1907. [4] *Н. П. Еругин*, Неявные функции, Изд. ЛГУ, Л., 1956.