

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

В. А. Бегларян

Единалы квазигруппы

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 10/IV 1973)

В настоящей заметке рассматриваются группы внутренних подстановок квазигруппы и дается их характеристика (ср. ⁽¹⁾).

Напомним ⁽¹⁾, что подквазигруппа H квазигруппы Q называется нормальными

- левым делителем, если $x(Hy) = H(xy) = (Hx)y$,
- правым делителем, если $x(yH) = (xy)H = (xH)y$,
- (двусторонним) делителем, если $xH = Hx$,
 $x(yH) = H(xy) = (Hx)y$, для всех x, y из Q .

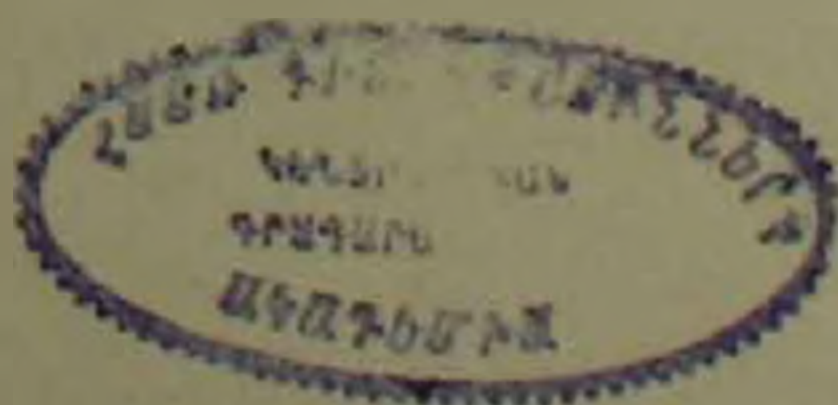
Исходя из этого определения, введем понятие внутренних подстановок квазигруппы Q (см. ⁽¹⁾).

Именно, подстановки из ассоциированной для Q группы Q вида $a_{x,y} = R_{xy}^{-1}L_xR_y$, $R_{x,y} = R_{xy}^{-1}R_yR_x$ назовем внутренними левыми, подстановки вида $\beta_{x,y} = L_{xy}^{-1}R_yL_x$, $L_{x,y} = L_{xy}^{-1}L_xL_y$ назовем внутренними правыми и, наконец, подстановки вида $T_x = L_x^{-1}R_x$, $R_{x,y}$, $L_{x,y}$ назовем (двусторонними) внутренними.

Заметим, что здесь и везде ниже символы L_x , R_x обозначают левую, соответственно, правую трансляцию Q , порожденные элементом $x \in Q$, т. е. $L_x a = xa$ и $R_x a = ax$, для всех $a \in Q$. Условимся через f_a и e_a обозначать левую, соответственно, правую локальные единицы элемента a из Q , т. е. однозначно определенные решения уравнений $ua = a$ и $ax = a$ соответственно (см. ⁽¹⁾).

Объектом нашего изучения будут подгруппы $I_l = I_l(Q)$, $I_r = I_r(Q)$, $I = I(Q)$ группы Q , которые порождаются, соответственно, всеми левыми, всеми правыми, всеми двусторонними внутренними подстановками квазигруппы Q . Поэтому назовем I_l , I_r , I группами внутренних левых, внутренних правых, внутренних (двусторонних) подстановок квазигруппы Q (см. ⁽¹⁾).

Нам потребуются некоторые из следующих соотношений, которые проверяются непосредственно.



$$\begin{aligned} \text{а) } a_{x,y}(f_y) &= f_{xy}, \quad R_{x,y}(f_x) = f_{xy} \\ g_{x,y}(e_x) &= e_{xy}, \quad L_{x,y}(f_y) = f_{xy}, \\ T_x(f_x) &= e_x, \end{aligned}$$

для всех x, y из Q .

$$\text{б) } R_y^{-1}L_xR_yI_l = R_xI_l, \quad L_x^{-1}R_yL_xI_r = L_yI_r \text{ для всех } x, y \text{ из } Q.$$

В самом деле, $R_{x,y} = a_{x,y}R_y^{-1}L_x^{-1}R_yR_x$, откуда $R_{x,y}^{-1} = R_x^{-1}R_y^{-1}L_xR_ya_{x,y}^{-1}$ или $R_xR_{x,y}^{-1} = R_y^{-1}L_xR_ya_{x,y}^{-1}$, т. е. $R_xR_{x,y}^{-1}I_l = R_y^{-1}L_xR_ya_{x,y}^{-1}I_l$, откуда и следует первое равенство. Второе — проверяется аналогично.

$$\text{в) } R_{f_x} \in I_l, \quad L_{e_x} \in I_r \text{ для всех } x, y \in Q.$$

Действительно, $R_{f_x} = R_x^{-1}R_xR_{f_x} = R_{f_x x}^{-1}R_xR_{f_x} = R_{f_x x} \in I_l$. Аналогично и для второго включения.

$$\text{г) } R_y^{-1}L_{f_x}R_y \in I_l, \quad L_x^{-1}R_{e_x}L_x \in I_r, \text{ для всех } x, y \in Q.$$

Для проверки этих включений нужно в б) положить $x = f_x$, — в первом случае, $y = e_x$ — во втором и воспользоваться в).

$$\text{д) } L_{f_x} \in I_l, \quad R_{e_x} \in I_r \text{ для всех } x, y \in Q.$$

С учетом в), полагаем в г) $y = f_x$, в первом случае, и $x = e_x$ — во втором.

$$\text{е) } R_x^{-1}R_{e_x}R_x \in I_l, \quad L_y^{-1}L_{f_x}L_y \in I_r \text{ для всех } x, y \in Q.$$

Действительно, $R_x^{-1}R_{e_x}R_x = R_{xe_x}^{-1}R_{e_x}R_x = R_{xe_x} \in I_l$ и аналогично для второго включения.

$$\text{ж) } R_x^{-1}L_xR_{e_x} \in I_l, \quad L_y^{-1}R_yL_{e_y} \in I_r, \text{ для всех } x, y \in Q.$$

В самом деле, $R_x^{-1}L_xR_{e_x} = R_{xe_x}^{-1}L_xR_{e_x} = a_{x,e_x} \in I_l$ и аналогично для второго случая.

Заметим (¹), что подквазигруппа H квазигруппы Q является ее нормальным левым (правым) делителем тогда и только тогда, когда $I_l(H) = H$, ($I_r(H) = H$), а в случае двустороннего делителя, очевидно, эти условия переходят в такое: $I(H) = H$. Поскольку $f_x \in H$, для каждого левого делителя, $e_x \in H$ — для каждого правого делителя и любого элемента x квазигруппы Q , то легко получаем следующий факт: пересечения любого непустого множества (левых, правых) нормальных делителей квазигруппы снова будет (левым, соответственно, правым) делителем этой квазигруппы. Отсюда становится понятным вывести следующие важные понятия.

Определение. *Левым, правым, двусторонним единалами квазигруппы Q называем пересечение всех нормальных, соответственно, левых, правых, двусторонних делителей Q . Эти наименьшие нормальные левый, правый, двусторонний делители Q будут обозначаться здесь через E_l, E_r, E соответственно.*

Отметим, что из включения $f_x \in H, e_x \in H$ для любого x из Q имеем: $f_x \in E_l, e_x \in E_r$ и, очевидно, $f_x \in E, e_x \in E$.

Связь между единалами квазигруппы Q и ее группами внутренних подстановок устанавливает следующая

Теорема 1. Для любого элемента a квазигруппы Q имеют место равенство:

$$l_l(f_a) = E_l, \quad l_r(e_a) = E_r, \quad l(f_a) = E = l(e_a).$$

Доказательству этой теореме удобно предпослать лемму, причем рассуждения приведем лишь для одного случая, скажем, для левого единичала и группы внутренних левых подстановок.

Лемма 1. Подстановка φ из Q принадлежит I_l тогда и только тогда, когда $R_{\varphi(f_a)} \in I_l$ и $L_{\varphi(f_a)} \in I_l$, где f_a произвольная локальная левая единица квазигруппы Q .

Для доказательства введем обозначение

$$F_a = \{\varphi/\varphi \in Q, \quad \varphi \in R_{\varphi(f_a)}I_l\}.$$

где f_a — произвольная фиксированная локальная левая единица в Q .

Покажем, что правая ассоциированная для Q группы Q содержится в F_a .

Прежде всего, F_a непусто: тождественная подстановка $\varepsilon \in R_{f_a}I_l = I_l$, поскольку, ввиду приведенного выше свойства в) всегда $R_{f_a} \in I_l$.

Пусть $\varphi(f_a) = t$ и $\varphi = R_t\theta$, для некоторого $\theta \in I_l$. Во-первых, проверим, что $R_x\varphi \in F_a$, если $\varphi \in F_a$, для произвольного $x \in Q$. Действительно, так как $R_x\varphi(f_a) = tx$, то

$$R_x\varphi = R_xR_t\theta = R_{tx}R_{x,t}\theta \in R_{tx}I_l = R_{R_x,t}I_l = R_{R_x\varphi(f_a)}I_l = R_{(R_x\varphi)f_a}I_l.$$

Отсюда, по определению F_a , $R_x\varphi \in F_a$.

Во-первых, проверим, что $R_x^{-1}\varphi \in F_a$, если $\varphi \in F_a$. Пусть $sx = t$, т. е. $R_x^{-1}\varphi(f_a) = s$. Тогда имеем $R_x^{-1}\varphi = R_x^{-1}R_t\theta = R_sR_s^{-1}R_x^{-1}R_t\theta = R_sR_s^{-1}R_x^{-1}R_{s,x}\theta = R_sR_s^{-1}\theta \in R_sI_l = R_{R_x^{-1}\varphi(f_a)}I_l = R_{(R_x^{-1}\varphi)f_a}I_l$, откуда опять $R_x^{-1}\varphi \in F_a$.

Теперь легко убедиться, что $Q_r \subseteq F_a$. Действительно, каждый элемент группы Q_r имеет вид $R_{x_1}^{-1}R_{x_2}^{-1} \dots R_{x_n}^{-1}$, и тогда $Q_r F_a \subseteq F_a$, с другой стороны, тождественная подстановка $\varepsilon \in F_a$, откуда $Q_r \subseteq F_a$.

Сходным образом проверяется, что левая ассоциированная для Q группа Q_l содержится в F_a . Во-первых $L_x\varphi \in F_a$, если $\varphi \in F_a$. В самом деле, так как $L_x\varphi(f_a) = xt$, то $L_x\varphi = L_xR_t\theta = R_{x,t}R_{x,t}^{-1}\theta \in R_{x,t}I_l = R_{L_x\varphi(f_a)}I_l = R_{(L_x\varphi)f_a}I_l$, откуда $L_x\varphi \in F_a$. Далее, $L_x^{-1}\varphi \in F_a$. Для проверки этого положим $L_x^{-1}\varphi(f_a) = u$, т. е. $xu = t$. Тогда $L_x^{-1}\varphi = L_x^{-1}R_t\theta = L_x^{-1}R_{x,u}\theta = R_uR_{x,u}^{-1}\theta \in R_uI_l = R_{(L_x^{-1}\varphi)f_a}I_l$, откуда $L_x^{-1}\varphi \in F_a$. Таким образом, $Q_l F_a \subseteq F_a$, откуда, в частности, $Q_l \subseteq F_a$.

Как следствие полученных двух включений, получаем $Q_l \subseteq F_a$, т. е. $Q_l = F_a$.

Следовательно, подстановка φ из Q принадлежит I_l тогда и только тогда, когда $R_{\varphi(f_a)}I_l = I_l$, т. е. в том и только в том случае, когда $R_{\varphi(f_a)} \in I_l$.

Второе включение доказывается по такой же схеме, если рассматривать вместо F_a множество

$$Z = \{\varphi/\varphi \in Q, \varphi \in L_{\varphi(f_a)}I_l\}.$$

Отметим следствие, которое вытекает из доказанной леммы, которое относится к свойствам внутренних подстановок.

з) $T_{\varphi(f_x)} \in I_l, T_{\varphi(e_x)} \in I_r$, для любых $\varphi \in Q, x \in Q$.

В самом деле, $\varphi \in R_{\varphi(f_x)}I_l$ и $\varphi \in L_{\varphi(f_x)}I_l$, т. е. $L_{\varphi(f_x)}^{-1}R_{\varphi(f_x)}I_l = I_l$ и, если вспомнить, что внутренняя подстановка $T_x = L_x^{-1}R_x$, то получаем первое включение. Второе включение получается, если воспользоваться „правым“ аналогом леммы 1.

Переходим к доказательству теоремы. Так как $f_a \in E_l$ и $I_l(E_l) = E_l$, то множество $I_l(f_a) = H \subseteq E_l$. Покажем, что H подквазигруппа в Q . Если $h_1, h_2 \in H$, т. е. $h_1 = \varphi(f_a), h_2 = \psi(f_a)$, для некоторых $\varphi, \psi \in I_l$, то $h_1 \cdot h_2 = \varphi(f_a)\psi(f_a) = R_{\varphi(f_a)}\varphi(f_a) = (R_{\varphi(f_a)}\varphi)(f_a)$. По лемме 1 нашего поряграфа $\psi \in R_{\psi(f_a)}I_l = I_l$, т. е. $R_{\psi(f_a)} \in I_l$. Отсюда, $R_{\psi(f_a)}\varphi \in I_l$ т. е. $h_1 \cdot h_2 \in H = I_l(f_a)$. Покажем, что $R_{h_1}^{-1}h_2 \in H$ и $L_{h_1}^{-1}h_2 \in H$, т. е. уравнения $h_2 = yh_1$ и $h_2 = h_1x$ разрешимы в H . В самом деле, мы показали, что если $\psi \in I_l$, то $R_{\psi(f_a)} \in I_l$, а тогда $R_{\psi(f_a)}^{-1} \in I_l$. Отсюда, $R_{h_1}^{-1}h_2 = R_{\varphi(f_a)}^{-1}\varphi(f_a) = (R_{\varphi(f_a)}^{-1}\varphi)(f_a) \in I_l(f_a) = H$. Теперь полагая в б) $x = \psi(f_a) = y$, имеем $L_{\varphi(f_a)}R_{\psi(f_a)}I_l = R_{\psi(f_a)}^2I_l$, откуда ввиду $R_{\psi(f_a)} \in I_l$, $L_{\varphi(f_a)}I_l = I_l$, т. е. $L_{\varphi(f_a)} \in I_l$. Отсюда опять $L_{h_1}^{-1}h_2 = L_{\varphi(f_a)}^{-1}\varphi(f_a) = (L_{\varphi(f_a)}^{-1}\varphi)(f_a) \in I_l(f_a) = H$. Покажем, наконец, что H нормальный левый делитель в Q . Для этого достаточно проверить $I_l(H) = H$. Но это видно из того, что $I_l^2 = I_l$ и $I_l(H) = I_l(I_l(f_a)) = I_l^2(f_a) = I_l(f_a) = H$. Теперь остается вспомнить, что E_l содержится в каждом нормальном левом делителе Q , а так как $H \subseteq E_l$, то $E_l = H = I_l(f_a)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\varphi \in Q$. Если для любого $f_x(e_x)$ существует f_y (соответственно, l_y), что $\varphi(f_x) = f_y$ (соответственно, $\varphi(e_x) = e_y$), то $\varphi \in I_l$ (соответственно, $\varphi \in I_r$).

Действительно, пусть $\varphi \in Q$ и $\varphi(f_x) = f_y$ для $x, y \in Q$. Тогда по лемме 1, $\varphi \in R_{\varphi(f_x)}I_l = R_{f_y}I_l = I_l$, так как $R_{f_y} \in I_l$ по свойству в).

Следствие 2. $(E_l)_* \subseteq I_l, (E_r)_* \subseteq I_r$ и $E_* \subseteq I$.

Действительно, проведем рассуждения для E_l и I_l . Пусть $x \in E_l$. Тогда из равенства $I_l(f_a) = E_l$ следует существование $\varphi \in I_l$, что $\varphi(f_a) = x$. Из рассуждений приведенных в лемме 1, ясно, что $R_x = R_{\varphi(f_a)} \in I_l$ и $L_x = L_{\varphi(f_a)} \in I_l$ т. е. $(E_l)_* \subseteq I_l$.

Для правого и двустороннего случая доказательство аналогично.

Прежде чем перейти к другим результатам, введем одно понятие (ср. (2), стр. 63). Непустое подмножество S квазигруппы Q назовем (лево-, право-) самосопряженным, если $I(S) \subseteq S$, соответственно, $I_l(S) \subseteq S, I_r(S) \subseteq S$ (Тогда в каждом из этих случаев $I(S) =$

$=S$, $I_l(S)=S$, $I_r(S)=S$). Каждый элемент определяет (односторонне) самосопряженное подмножество $I_l(x)$, $I_r(x)$ или $I(x)$. В смысле последнего определения $I_l(f_x)=E_l$, $I_r(f_x)=E_r$ и $I(f_x)=I(I_r)=E$ составляет отдельные классы (лево-, право-)—самосопряженных множеств соответствующих локальных единиц, как это следует из теоремы 1.

Лемма 2. Пусть H подквазигруппа квазигруппы содержащая левый единица E_l , и

$$K=\{k/k \in H, I_l(k) \subseteq H\}.$$

Тогда K наибольший нормальный левый делитель Q , содержащийся в H .

Доказательство. Ясно, что K непусто. Далее так как $I_l(K) \subseteq H$, то $I_l(K)=I_l^2(K)=I_l(I_l(K)) \subseteq H$, т. е. $I_l(K) \subseteq K$, $I_l(K)=K$, откуда ясно, что K левосамосопряженное множество.

Проверим, что K подквазигруппа в Q . Во-первых, $K \cdot K \subseteq K$. Действительно, если $k \in K$, $\varphi \in I_l$, то из доказательства леммы 1 $\varphi R_k \in R_{(\varphi R_k) \cdot I_l} I_l = R_{\varphi(k)} I_l$. Отсюда $\varphi(Kk) = \varphi(R_k K) = (\varphi R_k)(K) \subseteq \subseteq (R_{\varphi(k)} I_l)(K) \subseteq R_{\varphi(k)}(I_l(K)) \subseteq R_{\varphi(k)} K = K \varphi(k) \subseteq H \varphi(k) \subseteq H$, т. е. $\varphi(K \cdot K) \subseteq K$ и по определению K , $K \cdot K \subseteq K$. Покажем, что для любого $k \in K$ всегда $R_k^{-1} K \subseteq K$ и $L_k^{-1} K \subseteq K$. В самом деле, если f_x локальная левая единица для x , то пусть $\varphi R_k^{-1}(f_k) = s$. Тогда, $\varphi(R_k^{-1}(f_k)) = f_s \cdot s = R_s f_s$, т. е. по следствию 1, существует $\psi \in I_l$, что $R_s^{-1} \varphi R_k^{-1} = \psi$, откуда $\varphi = = R_s \psi R_k$. Теперь, $\varphi(f_k) = R_s \psi R_k(f_k) = R_s \psi(k) = \psi(k) s \in H$, т. е. $H = = H \psi(k) s = Hs$, откуда $s \in H$. Таким образом, $\varphi(R_k^{-1} K) = (\varphi R_k^{-1}) K = = (R_s \psi) K = \psi(K) s \subseteq H$, откуда $R_k^{-1} K \subseteq K$. Аналогично, $L_k^{-1} K \subseteq K$. Следовательно, K подквазигруппа в Q . Так как $I_l(K) \subseteq K$, то K нормальный левый делитель в Q . Далее, если N нормальный левый делитель Q , содержащийся в H , то $I_l(N) \subseteq N \subseteq H$, так что $N \subseteq K$. Это завершается доказательство леммы.

Следствие 3. Всякое (лево-, право-) самосопряженное подмножество порождает в квазигруппе нормальный (левый, соответственно, правый) делитель.

В самом деле, если подквазигруппа H порождается, например, левосамосопряженным множеством S , то $I_l(S) \subseteq S \subseteq H$, т. е. $S \subseteq K$, где множество K определено в лемме 2, откуда $K=S$.

В качестве приложения понятия групп внутренних подстановок получается.

Теорема 2. Если подквазигруппа H порождается в квазигруппе Q непустым множеством нормальных (левых, правых) делителей, то H сама является нормальным (левым, соответственно, правым) делителем.

Действительно объединение нормальных (левых, правых) делителей является (лево-, соответственно, право-) самосопряженным множеством. Остается воспользоваться следствием 3.

Քվադրիտիկ եղինակը

Ոգտվելով քվադրիտիկ նորմալ ձախ, նորմալ աջ և նորմալ բաժանա-
րարների գաղափարից, աշխատանքում ուսումնասիրվում է քվադրիտիկ ասո-
ցիատիվ խմբի I_l , I_r և I ենթախմբերը, որոնք առաջանում են համապա-
տասխանաբար, բոլոր ձախակողմյան՝ $x_{x,y} = R_{xy}^{-1} L_x R_y$ և $R_{x,y} = R_{xy}^{-1} R_y R_x$,
բոլոր աջակողմյան՝ $y_{x,y} = L_{xy}^{-1} R_y L_x$ և $L_{x,y} = L_{xy}^{-1} L_x L_y$, բոլոր երկկողմանի՝
 $T_x = L_x^{-1} R_x$, $R_{x,y}$ և $L_{x,y}$ ներքին տեղադրություններով:

Քվադրիտիկ համար սահմանվում է ձախ— E_l , աջ— E_r , երկկողմանի— E
եղինակներ, որպես համապատասխանաբար բոլոր նորմալ ձախ, բոլոր նոր-
մալ աջ և բոլոր նորմալ երկկողմանի բաժանարարների հատում:

Կապ է հաստատվում տեղադրությունների ներքին ձախ— I_l , աջ— I_r և
երկկողմանի— I խմբերի ու E_l , E_r և E եղինակների միջև:

Լեպացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1. Նրե f_a -ն և l_a -ն քվադրիտիկ համապատասխանաբար ձախ և
աջ կամավոր լուրջ միավորներ են, ապա՝

$$I_l(f_a) = E_l, \quad I_r(e_a) = E_r, \quad I(f_a) = I(e_a) = E.$$

Քվադրիտիկ համար սահմանվում է ինքնահամալուծ բաղադրություն և
ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2. Նրե H ենթաքվադրիտիկումն առաջանում է Q քվադրիտիկ ոչ
դասարկ նորմալ, նորմալ ձախ, նորմալ աջ, բաժանարարներով, ապա H -ը
հանդիսանում է համապատասխանաբար նորմալ, նորմալ ձախ, նորմալ աջ,
բաժանարար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- В. А. Бегларян, Нормальные делители в квазигруппах I. Ученые записки Ереванского университета, 1973. 2. В. Д. Белоусов, Основы теории квазигрупп и луп, изд. «Наука», 1967.
R. Bruck. A survey of binary Systems. Berlin—Heidelberg—Göttingen, Springer, Verlag, 1966.