ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVIII 1974 2

УДК 534.2—16

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. Саакян

О неустановившемся движении поверхности упругого полупространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/VII 1973)

1. Рассматривается задача о неустановившемся движении поверхности однородного изотропного упругого полупространства, вызванного бегущей на его поверхности осесимметричной нормальной нагрузкой. В момент времени $t=0$ нормальная нагрузка начинает распространяться из некоторой точки поверхности полупространства с постоянной скоростью c по закону (рис. 1)

$$p(r,\ t)=\frac{P_0 H(ct-r)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}, \tag{1.1}$$

где H—функция Хевисайда, P_0—постоянная.

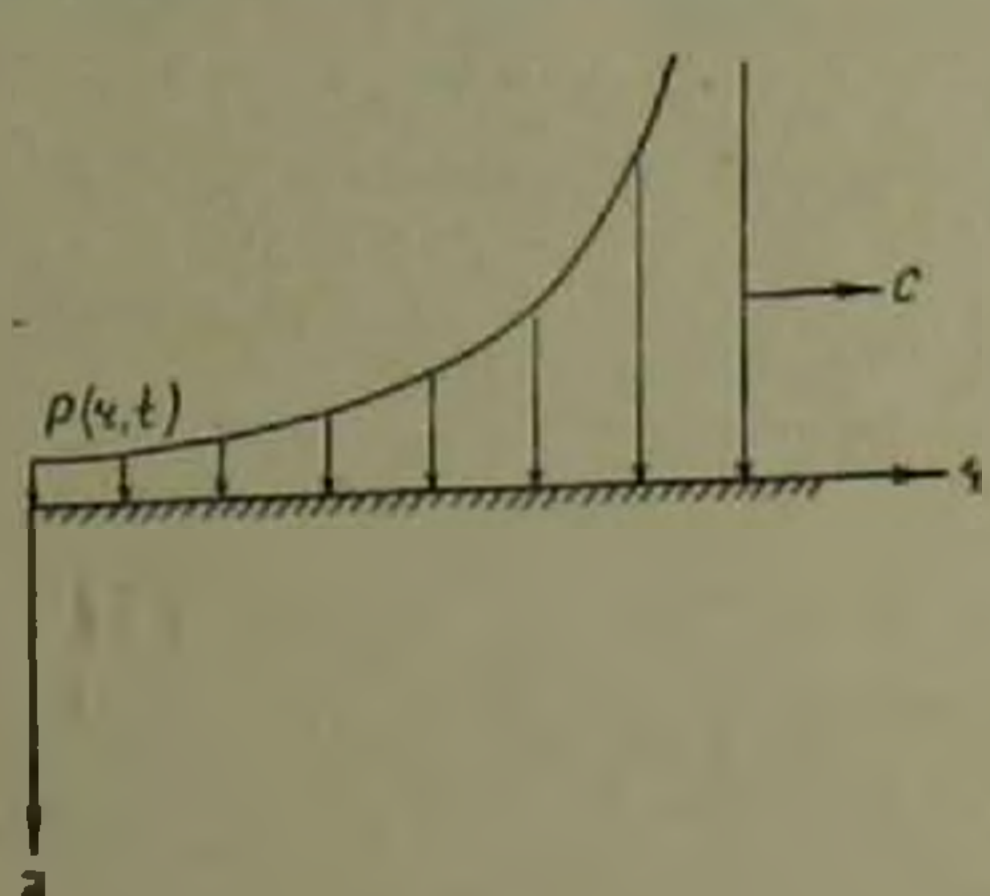

Рис. 1

Уравнения движения упругой среды с постоянными Ламе λ, μ и плотностью ρ_0 при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c_d^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

где $c_d^2=(\lambda+2\mu)/\rho_0$, $c_s^2=\mu/\rho_0$ — скорости распространения продольной и поперечной волн.

Компоненты u_r и u_z вектора перемещения связаны со скалярным φ и векторным ψ потенциалами соотношениями

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{r}. \tag{1.3}$$

Граничные условия задачи записываются так

$$\left[\left(\frac{1}{c_s^2}-\frac{2}{c_d^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]_{z=0}=-\frac{P_0H(ct-r)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}$$

$$\left[\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}\right]_{z=0}=0. \tag{1.4}$$

Отсутствие перемещений и скоростей перемещений среды в момент времени $t=0$ приводит к начальным условиям

$$\varphi(r,\ z,\ 0)=\frac{\partial\varphi(r,\ z,\ 0)}{\partial t}=\psi(r,\ z,\ 0)=\frac{\partial\psi(r,\ z,\ 0)}{\partial t}=0. \tag{1.5}$$

Решение задачи, ограниченное на бесконечности, получается, если к уравнениям (1.2) и (1.4) применить последовательно интегральные преобразования Лапласа и Ганкеля ([1]). Обращая преобразование Ганкеля полученного решения в образах и имея в виду формулы (1.3) для поверхности полупространства получаем представление перемещения в преобразовании Лапласа в виде

$$\overline{u}_\alpha=\int_0^\infty N_\alpha(k,\ p)\,dk, \quad (\alpha=r,\ z) \tag{1.6}$$

где

$$N_r(k,\ p)=\frac{P_0k^2(n_0-2n_dn_s)}{\mu cn_cL}J_1(kr), \qquad N_z(k,\ p)=\frac{P_0p^2kn_d}{c_s^2\mu cn_cL}J_0(kr), \tag{1.7}$$

$$n_0=2k^2+p^2/c_s^2, \quad n_d=\sqrt{k^2+p^2/c_d^2}, \quad n_s=\sqrt{k^2+p^2/c_s^2}$$

$$n_c=k^2+p^2/c^2, \quad L=n_0^2-4k^2n_dn_s. \tag{1.8}$$

В формулах $\overline{u}_\alpha$ — образ преобразования Лапласа оригинала u_α; p, k — параметры преобразований Лапласа и Ганкеля. Ветви радикалов n_d и n_s фиксированы условиями $\arg n_d=0$, $\arg n_s=0$ при $k>0$, $p>0$.

Образы приложенной нагрузки вычислялись по формулам ([2])

$$\int_{r/c}^{\infty} \frac{P_0 e^{-pt} dt}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} = \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right), \qquad \int_0^{\infty} \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right) J_0(kr) r dr = \frac{P_0}{c n_c}. \tag{1.9}$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя.

В формулах (1.6) вместо бесселевых функций J_0 и J_1 подставляем их интегральное представление Пуассона [2].

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr\cos\psi} d\psi, \quad J_1(kr) = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr) \tag{1.10}$$

и обозначаем $k\cos\psi = p\omega$, $k\sin\psi = pq$.

При этом для изображений Лапласа радиального и вертикального компонентов скорости получаем

$$\overline{v}_\alpha = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_\alpha(\omega, q) e^{i\omega pr} d\omega dq, \tag{1.11}$$

где

$$M_r(\omega, q) = \frac{P_0 \omega (m_0 - 2 m_d m_s)}{\mu c m_c R}, \qquad M_z(\omega, q) = \frac{P_0 m_d}{c_s^2 \mu c m_c R}, \tag{1.12}$$

$$m_0 = 2\omega^2 + 2q^2 + 1/c_s^2, \quad m_d = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_d^2}, \quad m_s = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_s^2},$$

$$m_c = \omega^2 + q^2 + 1/c^2, \quad R = m_0^2 - 4(\omega^2 + q^2) m_d m_s. \tag{1.13}$$

Для обращения $\overline{v}_\alpha$ пользуемся методами теории функций комплексного переменного. Для этого приводим $\overline{v}_\alpha$ к преобразованию Лапласа для известной функции, откуда и находим его оригинал.

На комплексной плоскости ω подинтегральная функция $M_\alpha(\omega, q)$ имеет особенности: точки ветвления при $\omega = \Omega_d^{\pm}$ и $\omega = \Omega_s^{\pm}$ и простые полюсы при $\omega = \Omega_c^{\pm}$ и $\omega = \Omega_R^{\pm}$, где

$$\Omega_d^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_d^2}, \quad \Omega_s^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \tag{1.14}$$

$$\Omega_c^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c^2}, \quad \Omega_R^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1/c_R^2}.$$

Функция Рэлея $R(\omega^2 + q^2)$ имеет простые нули при $\omega = \Omega_R^{\pm}$, где $c_R < c_s$ — скорость поверхностной волны Рэлея.

Положение особенностей в плоскости ω функции $M_\alpha(\omega, q)$ существенно зависит от значения отношений скорости распространения фронта нагрузки ударной волны к скоростям упругих объемных волн (рис. 2).

Рассмотрим подынтегральное выражение $\overline{v}_r$ на контуре $C = (\operatorname{Im}\omega = 0) + C_1 + Br_1 + Br_2 + C_2$ и применим теорию вычетов Коши. При этом, в пределе, когда радиус дуги окружностей C_1 и C_2 стремится к бесконечности, интегралы вдоль C_1 и C_2 стремятся к нулю по лемме Жордана и мы получаем

$$\frac{\pi c\mu \bar{v}_r}{P_0} = \int_0^\infty \int_{t_{qd}}^{t_{qs}} M_r(t,\ q) e^{-pt} dt\,dq + \Gamma_l \int_0^\infty \exp(-pr\sqrt{q^2 + 1/c^2})dq +$$

$$+ \Gamma_R \int_0^\infty \exp(-pr\sqrt{q^2 + 1/c_R^2})dq, \tag{1.15}$$

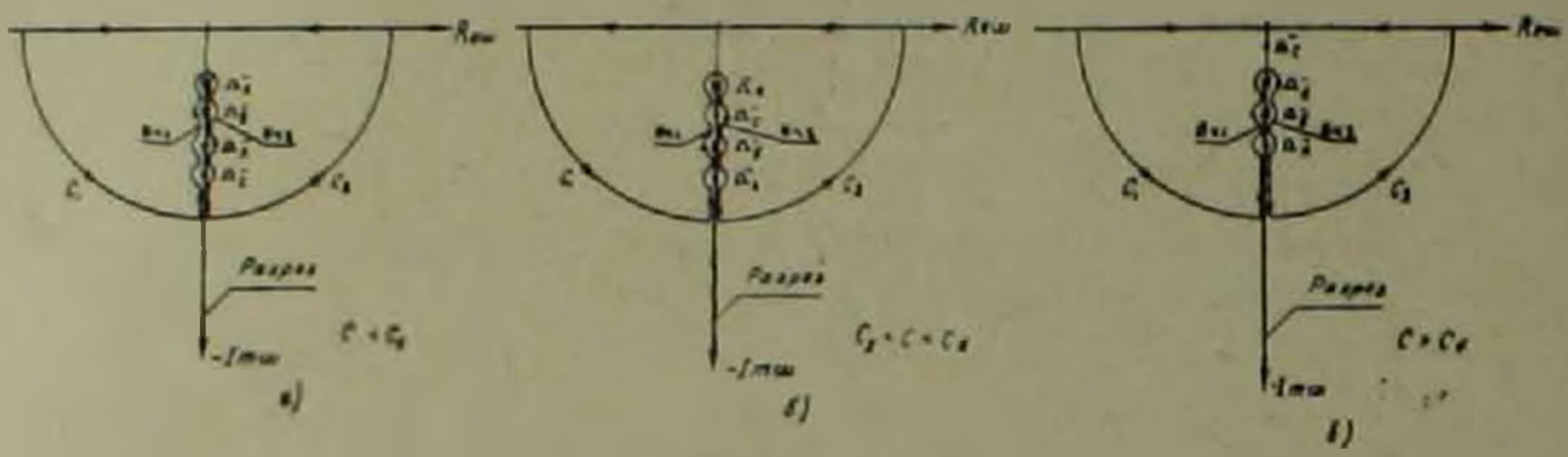

Рис. 2

где

$$t = i\omega r, \quad t_{qd} = r\sqrt{q^2 + 1/c_d^2}, \quad t_{qs} = r\sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \tag{1.16}$$

$$M_r(t,\ q) = \frac{4t\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2\right)\sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2}\sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2}}{c_s^2 r^2\left(\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c^2} + q^2\right)\left[\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2\right)^4 + 16\left(\frac{t^2}{r^2} - q^2\right)\left(\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2\right)\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2\right)\right]} \tag{1.17}$$

$$\Gamma_l = \begin{cases} \dfrac{\pi c_d^2(\gamma^2 - 2l^2 - 2\sqrt{\gamma^2 - l^2}\sqrt{1 - l^2})}{(\gamma^2 - 2l^2)^2 + 4l^2\sqrt{\gamma^2 - l^2}\sqrt{1 - l^2}} & \text{при} \quad l < 1 \\ \dfrac{\pi c_d^2[(\gamma^2 - 2l^2)^3 + 4l^2(\gamma^2 - l^2)(l^2 - 1)]}{(\gamma^2 - 2l^2)^4 + 16l^4(\gamma^2 - l^2)(l^2 - 1)} & \text{при} \quad 1 < l < \gamma \\ \dfrac{\pi c_d^2(\gamma^2 - 2l^2 + 2\sqrt{l^2 - \gamma^2}\sqrt{l^2 - 1})}{(\gamma^2 - 2l^2)^2 - 4l^2\sqrt{l^2 - 1}\sqrt{l^2 - \gamma^2}} & \text{при} \quad l > \gamma \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\gamma = c_d/c_s, \quad l = c_d/c \tag{1.19}$$

$$\Gamma_R = \frac{\pi c_R^2\left[\left(\frac{c_R^2}{c_d^2} - 2\right)\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}} + 4\left(1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}\right)\left(1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}\right)\right]}{2\left(1 - \frac{c_R^2}{c^2}\right)\left[4 - 3\frac{c_R^2}{c_d^2} - 3\frac{c_R^2}{c_s^2} + 2\frac{c_R^4}{c_d^2 c_s^2} - 2\left(2 - \frac{c_R^2}{c_s^2}\right)\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}}\right]} \tag{1.20}$$

В формуле (1.15), меняя порядок интегрирования в двухкратном интеграле, делая замену в двух последних интегралах $t=r\sqrt{q^2+1/c^2}$, $t=r\sqrt{q^2+1/c_R^2}$ и обращая преобразование Лапласа $\overline{v}_r$, имеем

$$\frac{\pi c\mu v_r}{P_0}=[H(t-t_d)-H(t-t_s)]\int_0^{q_d}M_r(t,q)dq+H(t-t_s)\int_{q_s}^{q_d}M_r(t,q)dq+$$

$$+\frac{\Gamma_R c_R tH(t-t_R)}{r\sqrt{(c_R t)^2-r^2}}+\frac{\Gamma_l ctH(t-t_c)}{r\sqrt{(ct)^2-r^2}}, \tag{1.21}$$

где

$$t_d=r/c_d,\quad t_s=r/c_s,\quad t_c=r/c,\quad t_R=r/c_R,$$

$$q_d=\sqrt{t^2-t_d^2}/r,\quad q_s=\sqrt{t^2-t_s^2}/r \tag{1.22}$$

Обращение $\overline{v}_z$ для всех скоростей распространения фронта нагрузки производится точно так же. Приведем окончательные результаты

$$\frac{\pi c\mu v_z}{P_0}=\Big[H(t-t_d)-H(t-t_s)\Big]\int_0^{q_d}M_z(t,q)dq+H(t-t_s)\Big\{\int_{q_s}^{q_d}M_z(t,q)dq+$$

$$+\text{v. p.}\int_0^{q_s}\overline{M}_z(t,q)dq\Big\}+\frac{\Gamma_l H(t-t_c)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}. \tag{1.23}$$

где

$$M_z(t,q)=\frac{r\left(\frac{1}{c_s^2}-\frac{2t^2}{r^2}+2q^2\right)M_r(t,q)}{2t\sqrt{\frac{1}{c_s^2}-\frac{t^2}{r^2}+q^2}}$$

$$\overline{M}_z(t,q)= \tag{1.24}$$

$$\frac{2\sqrt{\frac{t^2}{r^2}-\frac{1}{c_d^2}-q^2}}{c_s^2 r\left(\frac{1}{c^2}-\frac{t^2}{r^2}+q^2\right)\left[\left(\frac{1}{c_s^2}-\frac{2t^2}{r^2}+2q^2\right)^2-4\left(\frac{t^2}{r^2}-q^2\right)\sqrt{\frac{t^2}{r^2}-\frac{1}{c_d^2}-q^2}\sqrt{\frac{t^2}{r^2}-\frac{1}{c_s^2}-q^2}\right]}$$

$$\Gamma_l=\begin{cases}\dfrac{\pi\gamma^2c_d^2\sqrt{1-l^2}}{l[(\gamma^2-2l^2)^2+4l^2\sqrt{\gamma^2-l^2}\sqrt{1-l^2}]} & \text{при } l<1\\[2ex] \dfrac{2\pi lc_d^2(\gamma^2+2l^2)\sqrt{\gamma^2-l^2}(l^2-1)}{(\gamma^2-2l^2)^4+16l^4(\gamma^2-l^2)(l^2-1)} & \text{при } 1<l<\gamma\\[2ex] 0 & \text{при } l>\gamma.\end{cases} \tag{1.25}$$

В формулах (1.21) и (1.23) первый интеграл представляет собой скорость за фронтом продольной волны, а второй интеграл—скорость за фронтом поперечной волны. Два последних алгебраических члена представляют скорость за фронтами волны Рэлея и нагрузки соответственно. Из полученных формул следует, что вклад волны Рэлея в компоненты скорости по радиальному и вертикальному направлениям выражается по-разному. Для вертикального компонента скорости вклад волны Рэлея содержится в интеграле, который вычисляется в смысле главного значения по Коши, а для радиального компонента—в алгебраическом члене при $H(t-t_R)$.

II. Решение задачи вблизи фронтов волн $t=t_d$, $t=t_s$, $t=t_c$ и $t=t_R$ является неопределенным. Характер этих неопределенностей выяснится, если исключить время, входящее в пределы интегралов, с помощью замены $q=\sqrt{q_1^2+(q_2^2-q_1^2)\sin^2\alpha}$, где q_1 и q_2 — нижний и верхний пределы рассматриваемого интеграла. Далее, разложим подынтегральные выражения в ряды при $t\to t_d$, $t\to t_s$ и выполним интегрирования этих разложений. Эти прифронтовые разложения для слагаемых скорости по радиальному и вертикальному направлениям имеют вид

$$\int\limits_0^{q_d} M_r(t,q)dq=\frac{2\pi c_d^3\sqrt{\gamma^2-1}\,|l^2(\gamma^2-2)-\gamma^2|(t-t_d)}{r^2(l^2-1)(\gamma^2-2)^2}+0(t-t_d)^2,$$

$$\int\limits_0^{q_d} M_z(t,q)dq=\frac{3\pi c_d^3(t-t_d)}{r^2(l^2-1)(\gamma^2-2)}+0(t-t_d)^2,\quad \text{когда } t\to t_d \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{q_s}^{q_d} M_r(t,q)dq=0(1),\qquad \int\limits_{q_s}^{q_d} \overline{M}_z(t,q)dq=0(t-t_s)^{3/2}$$

$$\int\limits_{q_s}^{q_d} M_z(t,q)dq=\frac{\pi c_d^2(\gamma^2-1)}{2r\gamma(l^2-\gamma^2)}+0(t-t_s)^{1/2},\quad \text{когда } t\to t_s \tag{2.2}$$

$$\frac{\Gamma_R c_R t}{r\sqrt{(c_R t)^2-r^2}}=\frac{\Gamma_R}{\sqrt{2c_R r}}(t-t_R)^{-1/2}+0(t-t_R)^{1/2},\quad \text{когда } t\to t_R \tag{2.3}$$

$$\frac{\Gamma_l ct}{r\sqrt{(ct)^2-r^2}}=\frac{\Gamma_l}{\sqrt{2cr}}(t-t_c)^{-1/2}+0(t-t_c)^{1/2},$$

$$\frac{\Gamma_l'}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}=\frac{\Gamma_l'}{\sqrt{2cr}}(t-t_c)^{-1/2}+0(t-t_c)^{1/2},\quad \text{когда } t\to t_c \tag{2.4}$$

Таким образом, v_z является непрерывной на фронте продольной волны и имеет конечный разрыв непрерывности на фронте поперечной волны. На фронтах нагрузки и волны Рэлея скорость имеет бесконечный разрыв непрерывности.

По мере удаления от точки приложения нагрузки скорость убывает как r^{-2}, r^{-1} и $r^{-1/2}$ на фронтах продольной, поперечной и рэлеевской волн соответственно. На фронте нагрузки скорость убывает так же, как и в рэлеевской волне по мере удаления от точки приложения нагрузки. Поэтому, на больших расстояниях от точки приложения нагрузки существенные динамические эффекты могут проявляться от приложенной нагрузки и волны Рэлея.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Առաձգական կիսատարածության մակերևույթի չկայունացված շարժման մասին

Լապլասի և Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով լուծված է դինամիկական խնդիր համասեռ, իզոտրոպ, առաձգական կիսատարածության մակերևույթի համար։ Կիսատարածության մակերևույթին կիրառված նորմալ բեռը հանդիսանում է առանցքասիմետրիկ, ունի ճակատ և տարածվում է հաստատուն արագությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ., М., 1949. [2] *A. Erdelyi*, ed., Tables of Integral Transforms, vol. 2, McGraw-Hill, N. Y., 1954.