ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVIII 1974 1

УДК 539.37

МЕХАНИКА

В. В. Микаелян

Об одной задаче растяжения прямоугольника с упругими накладками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/VII 1973)

Исследованию напряженного состояния в полуплоскости с упругими креплениями посвящены многие работы. Подробная библиография по этому вопросу приводится в работах Р. Муки и Э. Стернберга ([1]), Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна ([2]).

В настоящей работе, так же как и в большинстве работ, посвященных задачам о передаче нагрузок от накладок к упругому телу, применяется допущение Э. Мелана ([3]), а именно—упругие крепления находятся в одноосном напряженном состоянии. Задача решается в перемещениях, которые представляются в виде суммы двух рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что эти системы квази—вполне регулярные. Несколько нам известно, подобная задача для прямоугольника рассматривается впервые.

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, когда две противоположные кромки его усилены частично четырьмя симметрично расположенными накладками имеющими малую толщину h, которые или приварены, или приклеены к кромкам прямоугольника. На внешних концах накладок приложены равные растягивающие силы P, направленные вдоль осей накладок (рис. 1). Участки контура прямоугольника, не усиленные накладками, принимаются свободными от нагрузок.

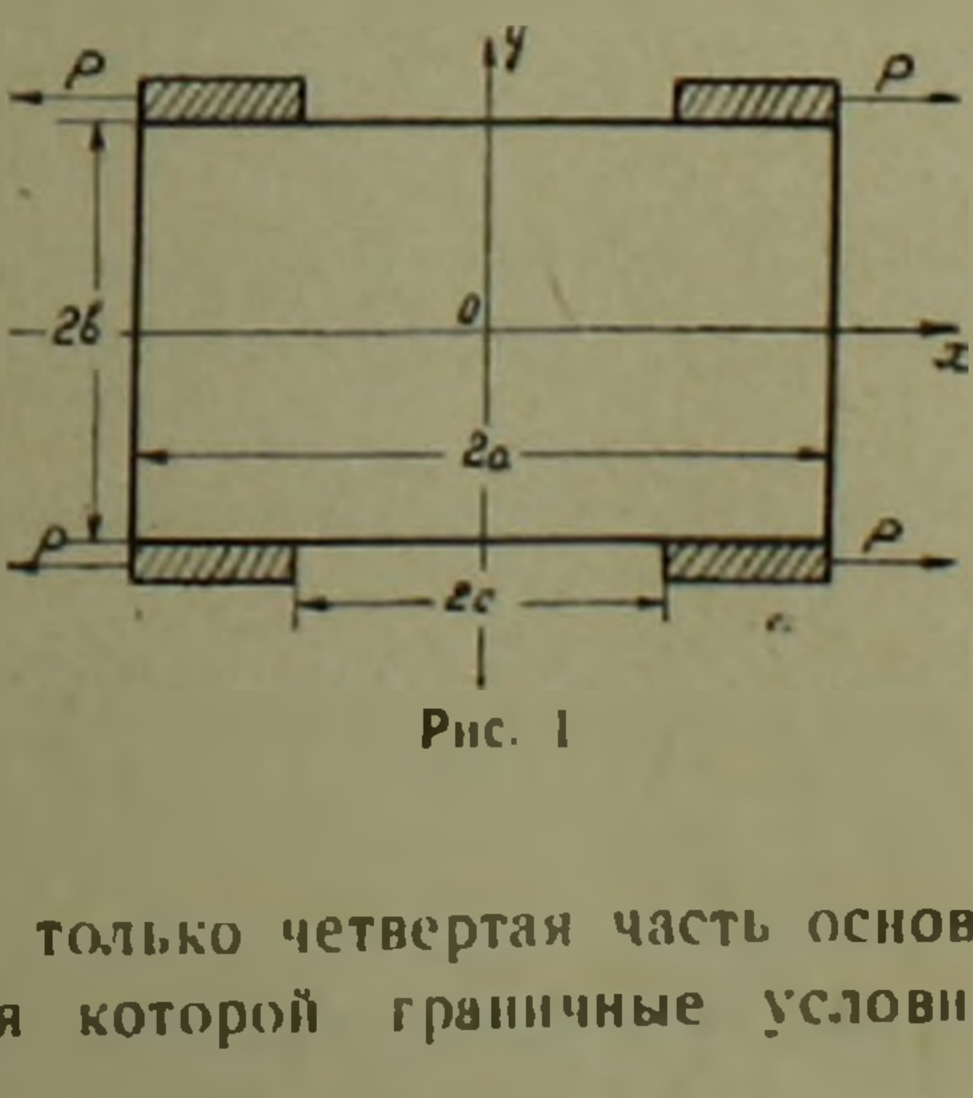

Рис. 1

В силу симметрии рассматривается только четвертая часть основной области $(0<x<a,\ 0\leq y\leq b)$, для которой граничные условия

будут иметь вид:

$$\sigma_x(a,\ y)=0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy}(a,y)=0 \tag{1.2}$$

На осях симметрии будем иметь

$$u(0,y)=\tau_{xy}(0,y)=v(x,0)=\tau_{xy}(x,0)=0. \tag{1.3}$$

Исходя из допущения Э. Мелана ([3]), а также учитывая малость поперечного сечения F накладки, на кромке $y=b$ всюду имеем

$$\sigma_y(x,b)=0 \tag{1.4}$$

и аналогично ([4]), если рассмотреть равновесия элемента накладки, получим граничные условия на $y=b$

$$\tau_{xy}(x,b)=0 \quad (0\leqslant x<c)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=b}=\frac{P}{E_1F}-\frac{1}{E_1h}\int_x^a\tau_{xy}(t,b)dt \quad (c<x<a), \tag{1.5}$$

где: E_1—модуль упругости материала, а h—толщина накладки. При этом отметим, что при $x=c$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=b}=0, \tag{1.6}$$

т. е. левый конец накладки свободен от нагрузки.

Задача решается в перемещениях, которые, как известно, должны удовлетворять уравнениям Ляме

$$\begin{aligned}&\mu\nabla^2u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}=0,\\ &\mu\nabla^2v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}=0,\end{aligned} \tag{1.7}$$

где:

$$\Delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а λ и μ упругие постоянные материала прямоугольника. Перемещения u и v представляем в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned}u=&-\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k(1-M_k)}{k\Delta_k}\left[\lambda_k(b-y)\operatorname{sh}\lambda_k y+\frac{\lambda_k b\operatorname{sh}\lambda_k(b-y)}{\operatorname{ch}\lambda_k b}-\right.\\ &\left.-2(1-\nu)\operatorname{ch}\lambda_k y\right]\sin\lambda_k x-\frac{b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k(-1)^{k+1}}{m\left(k-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\gamma_k a}\left[\gamma_k(a-x)\operatorname{ch}\gamma_k x-\right.\\ &\left.-\gamma_k a\frac{\operatorname{sh}\gamma_k(a-x)}{\operatorname{sh}\gamma_k a}+2(1-\nu)\operatorname{sh}\gamma_k x\right]\cos\gamma_k y+a_0x\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$v=\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k(1-M_k)}{k\Delta_k}\left[\lambda_k(b-y)\operatorname{ch}\lambda_k y-\frac{\lambda_k b\operatorname{ch}\lambda_k(b-y)}{\operatorname{ch}\lambda_k b}+\right.$$
$$\left.+(1-2\nu)\operatorname{sh}\lambda_k y\right]\cos\lambda_k x+\frac{b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k(-1)^{k+1}}{m\left(k-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\gamma_k a}\left[\gamma_k(a-x)\operatorname{sh}\gamma_k x+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_k a\operatorname{ch}\gamma_k(a-x)}{\operatorname{sh}\gamma_k a}-(1-2\nu)\operatorname{ch}\gamma_k x\right]\sin\gamma_k y-\frac{a_0\nu}{1-\nu},\tag{1.9}$$

где использованы обозначения

$$\Delta_k=\operatorname{sh}\lambda_k b+\frac{\lambda_k b}{\operatorname{ch}\lambda_k b},\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{a},\quad \gamma_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b},$$
$$M_k=1-\frac{\Delta_k}{\operatorname{ch}\lambda_k b+\frac{\alpha\Delta_k}{\lambda_k b}},\quad \alpha=\frac{\mu b}{E_1h(1-\nu)},\tag{1.10}$$

а ν коэффициент Пуассона. Напряжения выражаются через перемещения формулами

$$\sigma_x=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_y=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\tag{1.11}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (1.7) и граничные условия (1.2)—(1.4) будут удовлетворяться тождественно.

Из граничного условия (1.1) для определения неизвестных коэффициентов x_k и y_k, после некоторых преобразований получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$y_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_{nk}x_n+e_k,\tag{1.12}$$

где

$$a_{nk}=\frac{4m\gamma_k^3(-1)^n\operatorname{ch}\lambda_n b}{b\left(\operatorname{cth}\gamma_k a+\frac{\gamma_k a}{sh^2\gamma_k a}\right)\left(\lambda_n^2+\gamma_k^2\right)^2\left(\operatorname{ch}\lambda_n b+\frac{\alpha\Delta_n}{\lambda_n b}\right)},\tag{1.13}$$

$$e_k=\frac{2ma_0}{\pi(1-\nu)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left[\operatorname{cth}\gamma_k a+\frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}^2\gamma_k a}\right]},\tag{1.14}$$

где: m — произвольный параметр, который может быть выбран по нашему усмотрению, а из условий (1.5) получим парные тригонометрические уравнения, содержащие неизвестные коэффициенты x_k и y_k

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k\sin k\xi=\sum_{n=1}^{\infty}x_n M_n\sin n\xi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{m}f_n(\xi)\quad (0\leqslant\xi<\xi_1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cos k\xi=\frac{\alpha}{m\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n-\frac{1}{2}}\varphi_n(\xi)+\frac{P-a_0E_1F}{2E_1F(1-\nu)}\quad (\xi_1<\xi<\pi)\tag{1.15}$$

где введены обозначения

$$f_p(\xi)=\frac{1}{\operatorname{sh}p\pi}\left[p(\pi-\xi)\operatorname{ch}p\xi-\frac{p\pi\operatorname{sh}p(\pi-\xi)}{\operatorname{sh}p\pi}\right], \tag{1.16}$$

$$\varphi_p(\xi)=\frac{1}{\operatorname{sh}p\pi}\left[\operatorname{ch}p\xi+p(\pi-\xi)\operatorname{sh}p\xi+\frac{p\pi\operatorname{ch}p(\pi-\xi)}{\operatorname{sh}p\pi}\right], \tag{1.17}$$

$$x=\frac{a\xi}{\pi},\quad \xi_1=\frac{\pi c}{a},\quad p=\frac{a}{b}\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

Считая правые части парных уравнений (1.15) известными, и пользуясь решениями такого рода уравнений [5], для определения неизвестных коэффициентов x_k и y_k получаем вторую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$x_k=\sum_{n=1}^{\infty}b_{nk}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{nk}\,y_n+d_k, \tag{1.18}$$

где коэффициенты при x_n и y_n определяются формулами

$$b_{nk}=\frac{k}{2}M_n\,I_{nk}\,,\quad c_{nk}=-\frac{k}{2m}K_{nk}+\frac{k\alpha}{2bm\gamma_n}G_{nk}\,, \tag{1.19}$$

асвободный член имеет вид

$$d_k=\frac{y_k(\cos\xi_1)}{2(1-\nu)}\left(\alpha_0-\frac{P}{E_1F}\right). \tag{1.20}$$

При этом введены обозначения

$$I_{nk}=\int_0^{\xi_1}z_k(\cos\vartheta)\,Z_n(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta,$$

$$K_{nk}=\int_0^{\xi_1}z_k(\cos\vartheta)\,A_p(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta,$$

$$G_{\gamma nk}=\int_{\xi_1}^{\pi}z_k(\cos\vartheta)C_p(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta, \tag{1.21}$$

$$A_p(\cos\vartheta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{f_p(\xi)\sin\xi/2\,d\xi}{(\cos\xi-\cos\vartheta)^{1/2}} \tag{1.22}$$

$$C_p(\cos\vartheta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\varphi_p(\xi)\sin\xi/2\,d\xi}{(\cos\vartheta-\cos\xi)^{1/2}}. \tag{1.23}$$

Здесь функции $y_k(\cos\vartheta)$ и $Z_k(\cos\vartheta)$ представляют собой соответственно сумму и разность полиномов Лежандра с индексами $k-1$ и k. Интегральные представления и дифференциальные для этих функций приводятся в работе [5].

2. При исследовании функций $A_p(\cos\vartheta)$ и $C_p(\cos\vartheta)$ будем использовать свойство некоторых функций $Z_p(x)$, $W_p(x)$, $Y_p(x)$, $V_p(x)$, $L_p(x)$, $R_p(x)$, $H_p(x)$ и $K_p(x)$, которые рассмотрены в работах [6,7], эти функции по структуре похожи функциям $A_p(x)$ и $C_p(x)$. Отметим еще, что с функцией $A_p(x)$ тесно связана также и функция $B_p(x)$

$$B_p(\cos\vartheta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{[(1-p\pi\operatorname{cth}p\pi)\operatorname{ch}p\xi+p\xi\operatorname{sh}p\xi]}{(\cos\xi-\cos\vartheta)^{1/2}}\cos\xi/_2 d\xi \tag{2.1}$$

Используя результаты работ (6,7) непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений

$$A_p(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}p\pi}\left[p\pi\operatorname{cth}p\pi Z_p(x)-pW_p(x)\right],\quad C_p(x)=2R_p(x)-L_p(x),$$

$$B_p(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}p\pi}\left[(1-p\pi\operatorname{cth}p\pi)\,Y_p(x)-pV_p(x)\right], \tag{2.2}$$

$$(1+x)A_p'(x)=pB_p(x),\quad (1+x)C_p'(x)=p[H_p(x)-K_p(x)], \tag{2.3}$$

$$(1-x)[(1+x)A_p'(x)]'=p^2A_p(x)-\frac{2p^2Z_p(x)}{\operatorname{sh}p\pi}, \tag{2.4}$$

$$(1-x)[(1+x)\,C_p'(x)]'=p^2C_p(x)-2p^2R_p(x), \tag{2.5}$$

а в точках $x=\pm1$ функции (2.2) имеют значения

$$A_p(1)=B_p(-1)=0,\quad B_p(1)=\frac{2(1-p\pi\operatorname{cth}p\pi)}{\operatorname{sh}p\pi}, \tag{2.6}$$

$$A_p(-1)=-\frac{8p^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{(k^2+p^2)^2},\quad C_p(1)=\frac{4}{p\pi},\quad C_p(-1)=2\left(\operatorname{cth}p\pi+\frac{p\pi}{\operatorname{sh}^2p\pi}\right).$$

Для функций $A_p(\cos\vartheta)$ и $B_p(\cos\vartheta)$ будут иметь место следующие асимптотические формулы

$$A_p(\cos\vartheta)=\frac{2p}{\pi}e^{p(\vartheta-\pi)}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}}}(\pi-\vartheta)+0\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} \tag{2.7}$$

$$B_p(\cos\vartheta)=\frac{2p}{\pi}e^{p(\vartheta-\pi)}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{p\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}}(\vartheta-\pi)+0\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)\right\} \tag{2.8}$$

Воспользуясь дифференциальными уравнениями для $z_k(x)$ (³) и функциональными зависимостями (2.4); (2.5) получим значения следующих интегралов

$$\int\frac{A_p(x)z_k(x)}{1-x}dx=\frac{pz_k(x)\,B_p(x)+kA_p(x)\,y_k(x)}{p^2+k^2}+$$

$$+\frac{2p^2}{(p^2+k^2)^2\operatorname{sh}p\pi}\left|ky_k(x)Z_p(x)-pz_k(x)\,Y_p(x)\right| \tag{2.9}$$

$$\int \frac{C_p(x)z_k(x)}{1+x}dx = \frac{2p^2}{(k^2+p^2)^2}\Big| ky_k(x)R_p(x) - pz_k(x)K_p(x)\Big| +$$
$$+\frac{1}{k^2+p^2}\Big| Pz_k(x)\,(H_p(x)-K_p(x)) + ky_k(x)\,(2R_p(x)-L_p(x))\Big| +$$
$$+\frac{4p^2\sqrt{2}}{\pi(k^2+p^2)^2}\int \frac{z_k(x)dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}. \tag{2.10}$$

Перейдем к исследованию регулярности бесконечных систем линейных уравнений (1.12) и (1.18)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq \frac{4\gamma_k^2 m}{b\left(\operatorname{cth}\gamma_k a + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}^2\gamma_k a}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k^2+\lambda_n^2)^2} =$$
$$= m\left|1 - \frac{2}{\gamma_k a\left(\operatorname{cth}\gamma_k a + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}^2\gamma_k a}\right)}\right| \leq m, \tag{2.11}$$

при этом использовали значение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^2+\gamma_k^2)^2} = \frac{b}{4\gamma_k^3}\left|\operatorname{cth}\gamma_k a + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh}^2\gamma_k a} - \frac{2}{\gamma_k a}\right|.$$

Из (1.10) видно, что число M_n при любом n остается меньше единицы и при больших n стремится к нулю как n^{-1}, следовательно, как это сделано в (8) можно доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_{nk}|$ для больших k стремится к нулю как $\frac{\ln k}{k}$.

Оценим теперь $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_{nk}|$, используя при этом (2.6—2.10), а также асимптотические оценки для функций $y_k(x)$, $Z_k(x)$ (5) и $Y_p(x)$, $Z_p(x)$ $H_p(x)$, $K_p(x)$, $R_p(x)$ $L_p(x)$ (6.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_{nk}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{p(\theta-\pi)} \left\{ \frac{Ap^{\frac{3}{2}}k^{\frac{1}{2}} + Bk^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}}{p^2+k^2} + \frac{Cp^{\frac{3}{2}}k^{\frac{3}{2}} + Dp^{\frac{5}{2}}k^{\frac{1}{2}}}{(p^2+k^2)^2} \right\} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k} \left\{ \frac{Ep^{-2}+Fkp^{-2}}{k^2+p^2} + \frac{C_1p^{-1}+Hk}{(p^2+k^2)^2} \right\} = 0\left(k^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{2.12}$$

Таким образом, сумма абсолютных значений коэффициентов бесконечной системы (1.18) стремится к нулю. А в оценке (2.11) для системы (1.12) можно взять в качестве m любое число меньше единицы и тогда совокупность систем линейных алгебраических уравнений (1.1) и (1.18) окажется квази-вполне регулярной. При решении системы (1.12) и (1.18) неизвестные x_k и y_k будут выражаться через постоянное a_0. Это постоянное определяется из выражения

$$\frac{a}{m\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\varphi_p(\xi_1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n\alpha\Delta_n\cos n\xi_1}{\nu_n b\,\mathrm{ch}\,\nu_n b+\alpha\Delta_n}+\frac{P}{2(1-\vartheta)E_1F}=0, \qquad (2.13)$$

которое получается путем преобразования (1.6).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Առաձգական վերադիրներով ուղղանկյան ձգման մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը։ Ուղղանկյան երկու հանդիպակաց կողերը մասնակիորեն ուժեղացված են սիմետրիկ դասավորված չորս առաձգական վերադիրներով, որոնք ենթարկվում են ձգման իրենց առանցքների ուղղությամբ, իսկ եզրագծի այն մասերը, որոնք չեն ուժեղացված, ընդունվում են ազատ բեռնվածություններից։

U և V տեղափոխումները, որոնք ներկայացնում են խնդրի լուծումը, փնտրվում են Ֆուրյեի երկու շարքերի գումարի տեսքով։ Այդ շարքերի գործակիցների որոշումը եռանկյունաչափական կորիզներով զույգ շարք-հավասարումների միջոցով բերվում են Քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի լուծման։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Муки, Э. Стеренберг.* Прикладная механика. Русский перевод трудов ASMEт. 35, №4(1968). 134—135. [2] *N. X. Arutunyan* and *S. M. Mkhitaryan* Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters—Noordhoff Publishing. 1971, p 3—20. [3]. *E. Melan* Lngeneleur Archiv, vol 3, no 2, 1932, p. 123—129. [4] *Н. Х. Арутюнян.* ПММ, т. 32, 1968, в. 4, 632—646. [5] *А. А. Баблоян,* ПММ, т. 31, 1967, 678—689. [6] *А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян.* «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXII, №1 (1969). [7] *А. А. Баблоян, А. М. Мкртчян,* «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXIV, №5 (1971). [8] *А. А. Баблоян, В. Г. Саакян,* «Известия АН Арм ССР», Механика, т. XX, №5 (1967).