

УДК 51 : 621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

I-Индукторы и некоторые их свойства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 19/VI 1973)

В настоящей работе предлагается некоторая формализация процесса индуктивного обобщения в задаче формирования описаний для множеств булевых векторов заданной размерности. В рамках этой формализации вводятся определенные критерии оценки эффективности работы алгоритмов индуктивного обобщения и относительно этих критериев производится оценка алгоритмов в условиях тех или иных ограничений на множества булевых векторов.

Многие из понятий, используемых в настоящей работе, идейно близки понятиям, ранее введенным другими авторами. Так, понятие сложности множества булевых векторов относительно индуктора аналогично определению сложности числа относительно рекурсивной функции, введенное А. Н. Колмогоровым ⁽¹⁾, понятие индуктора с регулятором близко к понятию алгоритма индуктивного вывода с зависимым выбором Э. Хаита ⁽²⁾ и оператора, восстанавливающего булеву функцию по отдельным его значениям, В. К. Коробкова ⁽³⁾.

1. Обозначим через E_n множество всех n -мерных булевых векторов. Для произвольной упорядоченной пары непересекающихся подмножеств E_n , а также для пар вида $(\emptyset, M)$, $(M, \emptyset)$, где $M \subseteq E_n$, введем обозначение ПБМ (пара булевых множеств).

Определение 1. Произвольную ПБМ (M_1, M_0) назовем *абсолютной* (абс.) если $M_1 = E_n / M_0$.

Определение 2. Произвольную ПБМ (M_1^*, M_0^*) назовем *расширением* ПБМ (M_1, M_0) , если $M_1 \subseteq M_1^*$ и $M_0 \subseteq M_0^*$.

Условно на этот факт будем указывать посредством записи

$$(M_1, M_0) \subseteq (M_1^*, M_0^*).$$

Определение 3. Для произвольного класса ПБМ A *разложением* A назовем множество $R(A)$ всех тех ПБМ, для каждого из которых в A найдется хотя бы одно расширение.

Для удобства дальнейшего изложения взаимно однозначно зако-

дируем все ПБМ номерами $1, 2, \dots, t_n$, где $t_n = 3^{2^n}$. Через x обозначим соответствующий нумерующий оператор, а через γ_1, γ_0 — декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру t первую и вторую компоненты ПБМ с этим номером. В дальнейшем изложении каждая ПБМ и его номер отождествляются. Предполагается также, что параметр n произвольный, но фиксированный.

Введем следующие обозначения:

N — множество всех натуральных чисел $0, 1, 2, \dots$,

L_n — множество всех абс. ПБМ,

$T_n = \{1, 2, \dots, t_n\}$, M — мощность множества M ,

ОРФ — обще-рекурсивная функция.

Определение 4. Произвольную одноместную ОРФ f назовем *1-индуктором*, если выполнены условия:

- 1) $\forall x (x \in T_n \rightarrow f(x) \in T_n)$;
- 2) $\forall x (x \in T_n \rightarrow x \subseteq f(x))$,
- 3) $\forall xy (x, y \in T_n \& x \subseteq y \subseteq f(x) \rightarrow f(x) \subseteq f(y))$;
- 4) $\forall x (x \in N/T_n \rightarrow f(x) = t_n + 1)$.

Определение 5. 1-индуктор f назовем *абсолютизирующим* (абс.), если выполнено условие:

- 1'. $\forall x (x \in T_n \rightarrow f(x) \in L_n)$.

Множество всех 1-индукторов обозначим через Ξ_n^1 , а множество всех абс. 1-индукторов — через Ω_n^1 . Имеет место следующая оценка мощности Ω_n^1 : $2^{2^{n+1}-1} \leq \overline{\Omega_n^1} \leq 2^{2^{n+1}-2^{n+1}}$, где $p = 2^n$.

Рассмотрим общие ограничения на возможности индукторов. Предварительно введем критерии оценки этих возможностей.

Определение 6. *Генератором последовательности номеров* (ГПН) назовем произвольную ОРФ, значения которой принадлежат T_n .

Определение 7. ГПН $\varphi(t)$ назовем *расширяющимся* (РГПН), если $\forall t (\varphi(t) \subseteq \varphi(t+1))$.

Определение 8. Будем говорить, что ГПН $\varphi(t)$ *согласован* с ПБМ (M_1, M_0) , если: $\forall t (\varphi(t) \subseteq x(M_1, M_0))$.

Через $\Phi(v)$ будем обозначать множество всех ГПН, согласованных с ПБМ v .

Определение 9. Для произвольных $f \in \Xi_n^1$, $v \in T_n$ и $\varphi \in \Phi(v)$, *временной сложностью* ПБМ v относительно $(f, \varphi)_c$ назовем число

$$S_c^v(v, f, \varphi) = \begin{cases} \mu_{c-1}(f(\varphi(t)) \supseteq v), & \text{если такое } t \text{ существует,} \\ c+1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где c — заранее заданное натуральное число, а μ — оператор минимизации.

Объемной сложностью v относительно $(f, \varphi)_c$ назовем число

$$S_0^v(v, f, \varphi) = \overline{\gamma_1(\varphi(a))} + \overline{\gamma_0(\varphi(a))}, \text{ где } a = S_c^v(v, f, \varphi).$$

Определение 10. Для произвольных $A \subseteq T_n$, $G \subseteq \Xi_n^1$, ($A \neq \emptyset$, $G \neq \emptyset$), объемной сложностью A относительно G назовем число

$$S_0^c(A, G) = \min_{v \in G} \max_{f \in A} \min_{\varphi \in \Phi(v)} S_0^c(v, f, \varphi).$$

Ясно, что: $\forall f \forall v (f \in \Xi_n^1 \& v \in T_n \rightarrow S_0^c(|v|, |f|) = \min_{(M_1, M_0) \in D} (M_1 \cup M_0))$,

где $D = \{ (M_1, M_0) / (M_1, M_0) \in R(|v|) \& f(x(M_1, M_0)) \supseteq v \}$

Легко показать, что: $\forall y (y \in T_n \rightarrow \exists f (f \in \Xi_n^1 \& S_0^c(|y|, |f|) = 0))$ и

$\forall y (y \in L_n \rightarrow \exists f (f \in \Omega_n^1 \& S_0^c(|y|, |f|) = 0))$,

Следующие две теоремы направлены на выявление природы ограничений на нижние оценки функции сложности класса заданных абс. ПБМ относительно класса 1-индукторов.

Теорема 1. $\forall k A (1 \leq k \leq 2^n \& A \subseteq L_n \& A \geq 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1} \rightarrow S_0^c(A, \Omega_n^1) \geq k)$

Следствие 1.1. $\forall k A (1 \leq k \leq 2^n \& A \subseteq L_n \& S_0^c(A, \Omega_n^1) < k \rightarrow A \leq 2^{k-1} C_{2^n}^{k-1})$

Следствие 2.1. $S_0^c(L_n, \Omega_n^1) \geq k$, где $k = n, (2^t C_{2^n}^t \geq 2^{2^n})$.

Теорема 2. $\forall n \exists A (n > 0 \rightarrow A \subseteq L_n \& S_0^c(A, \Omega_n^1) < |\log A|)$.

Покажем, что не существует оптимального абс. 1-индуктора.

Теорема 3. $\neg \exists f^* \forall z f(f^*, f \in \Omega_n^1 \& z \in L_n \rightarrow S_0^c(z, f^*) \leq S_0^c(z, f))$.

Теорема 4. Для произвольных абс. 1-индуктора $f(x)$ и строго возрастающей ОРФ $\varphi(t)$ можно построить РГПН $\varphi(t)$ такой, что $\forall t (t \geq 1 \& \varphi(t) \leq 2^n \rightarrow \nu_1(\varphi(t)) \cup \nu_2(\varphi(t)) = \varphi(t) \& f(\varphi(t+1)) \neq f(\varphi(t)))$.

Следствие 1.4. $\forall f \exists v \varphi (f \in \Omega_n^1 \rightarrow v \in L_n \& \varphi \in \Phi(v) \& \varphi(t) \subset \varphi(t+1) \& S_0^c(v, f, \varphi) = 2^n \& S_0^c(v, f, \varphi) = 2^n)$.

2. Рассмотрим условия повышения эффективности индуктивного обобщения при одной из интерпретаций этого процесса.

Пусть некий «ученик» пытается сформировать понятие о некотором фиксированном множестве ситуаций, задуманных «учителем», по отдельным элементам из этого множества и его дополнения до некоторого универсального множества, которые он получает от «учителя».

Нам представляется, что сравнительно быстрое формирование понятий у «ученика» посредством методов индуктивного обобщения возможно в следующих условиях.

1. Если «ученик» располагает другими знаниями, прямо или косвенно связанными с задуманным «учителем» множеством. Эти знания значительно сужают область поиска нужного понятия и тем самым облегчают его выбор. Форма, в которой эти знания становятся известными «ученику» может быть весьма разнообразной. В частности, «ученик» их может получить в виде знаний об общих ограничениях на ситуации окружающей его среды или общих законах, протекающих в природе процессов, либо в виде знаний о степени сходства (различия) физических конструкций или языковых средств описания множеств ситуаций своего и «учителя».

II. Если «ученик» имеет возможность определенным образом управлять последовательностью ситуаций, которые предъявляет ему «учитель». Например, если он может потребовать предъявить ему какие-то конкретные ситуации и сказать к какому классу они относятся, задать определенные вопросы об этих ситуациях и др.

Такое индуктивное обобщение происходит в условиях так называемого зависимого выбора ⁽²⁾. Нижеследующие теоремы показывают возможности индуктивного обобщения при некоторых конкретных ограничениях I и II типов.

3. Обозначим через A_s и A_m множество всех симметрических и монотонных булевых функций (абс. ПБМ).

Теорема 5. $k_s \leq S_0^r(A_s, \Omega_n^*) \leq n+1$, где $k_s = \nu_1(2^t C_{2^n}^t \geq 2^{n+1})$.

Теорема 6. $k_m \leq S_0^r(A_m, \Omega_n^*) \leq C_{\frac{n}{2}}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, где $k_m = \nu_1(2^t C_{2^n}^t \geq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$.

Определение 12. Произвольную ОРФ $q(t, x, y)$ назовем регулятором, если $\forall txy((t, x, y) \in N \times T_n \times T_n \rightarrow q(t, x, y) \in T_n \& \gamma_0(q(t, x, y)) = \emptyset)$.

Множество всех регуляторов обозначим через Q_n .

Определение 13. Для произвольных $I \in \Xi_n^*$, $q \in Q_n$, ГПН φ назовем порожденным (I, q) , если

1. $\gamma_1(\varphi(0)) \cup \gamma_0(\varphi(0)) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$.
2. $\forall t(t > 0 \rightarrow \gamma_1(\varphi(t+1)) \cup \gamma_0(\varphi(t+1)) = \gamma_1(q(t, \varphi(t), I(\varphi(t))))$.

Легко видеть, что для произвольных $I \in \Xi_n^*$, $v \in L_n$, $q \in Q_n$ можно построить единственный ГПН, порожденный (I, q) и согласованный с v .

Определение 14. Для произвольных $I \in \Xi_n^*$, $v \in L_n$, $q \in Q_n$, временной (объемной) сложностью v относительно (I, q) назовем числа $S_n^r(v, (I, q)) = S_n^r(v, I, \varphi_v)$, $S_0^r(v, (I, q)) = S_0^r(v, I, \varphi_v)$,

где φ_v — ГПН, порожденный (I, q) и согласованный с v .

Теорема 7. Для класса симметрических ПБМ A_s можно построить абс. 1-индуктор I_s и регулятор q_s такие, что

$$0 \leq S_n^r(A_s, (I_s, q_s)) \leq n+1, \quad 1 \leq S_0^r(A_s, (I_s, q_s)) \leq n+1.$$

Утверждение нижеследующей теоремы основано на аналогичной теореме 5 работы ⁽³⁾.

Теорема 8. Для класса монотонных ПБМ A_m можно построить 1-индуктор I и регулятор q такие, что $S_n^r(A_m, (I, q)) \leq p$,

$$S_0^r(A_m, (I, q)) \leq \prod_{i=1}^p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k_i}{2} \rfloor} C_{k_i}^{2j} 2^{n-a_p} + \sum_{i=1}^p 2C_{\frac{k_i}{2}}^{\lfloor \frac{k_i}{2} \rfloor} 2^{n-a_i} \prod_{l=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k_l}{2} \rfloor} C_{k_l}^{2j}$$

Где p — число, удовлетворяющее условиям:

$$(p+1)(\sqrt[3]{16})^{p+1} > n > p(\sqrt[3]{16})^p; \quad k_i = \left\lfloor \frac{\sqrt[3]{16-1}}{(\sqrt[3]{16})^i} n \right\rfloor,$$

$$1 \leq i \leq p; \quad a_r = \sum_{i=1}^r k_i, \quad 1 \leq r \leq p.$$

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

1-Ինկուկտորներ և նրանց որոշ հատկություններ

Աշխատանքում առաջարկվում է ինդուկտիվ ընդհանրացման որոշ ֆորմալիզացում տվյալ շափանիության բուլյան վեկտորների բազմությունների նկարագրումների կազմավորման խնդրում:

Այդ ֆորմալիզացիայի սահմաններում մտցվում են ցուցանիշներ ինդուկտիվ ընդհանրացման ալգորիթմների աշխատանքի էֆեկտիվությունը գնահատելու համար և բոլոր այդ ցուցանիշների կատարվում են ալգորիթմների գնահատումներ, բուլյան վեկտորների բազմությունների այս կամ այն սահմանափակումների պայմաններում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՔՆԵՐ

- ¹ А. Н. Колмогоров. Сб. Проблемы передачи информации, т. 1, вып. 1, 1965.
² Э. Хант, Дж. Марин, Ф. Стоун. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине, изд. «Мир», М., 1970. ³ В. К. Коробков, О монотонных функциях алгебры логики, «Проблемы кибернетики», вып. 13, М., 1965. ⁴ К. Шеннон. Символический анализ релейных и переключательных схем, сб. Шеннон К., «Работы по теории информации и кибернетике», ИЛ., 1963.