УДК 517.522

МАТЕМАТИКА

Л. А. Шагинян

О суммируемости рядов по системе Хаара к $+\infty$ методом Абеля

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянном 28/V 1973)

Для рядов по системе Хаара $\{\chi_k(t)\}$ Н. К. Барн (см. ⁽¹⁾ стр. 112—115) была доказана

Теорема А. Для всякой измеримой и конечной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$, существует ряд по системе Хаара

$$\Omega \sim \sum a_i \chi_i(t),$$

который сходится почти всюду на $[0,1]$ к функции $f(x)$.

В дальнейшем, в работах ⁽²⁾ и ⁽³⁾ другими методами были получены усиления теоремы А, при этом в работе ⁽³⁾ доказана

Теорема Б. Для всякой измеримой и конечной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$, существует абсолютно сходящийся почти всюду на $[0,1]$ ряд Ω , который сходится почти всюду на $[0,1]$ к функции $f(x)$.

Отметим, что в теореме А конечность функции $f(x)$ существенна, а именно, в работе ⁽⁴⁾ была установлена

Теорема В. Ряды по системе Хаара не могут сходиться к $+\infty$ на множествах положительной меры.

Более того, в работе ⁽⁵⁾ доказано, что ряды по системе Хаара не суммируются к $+\infty$ на множествах положительной меры методами Чезаро ($C, \alpha > -1$). Возникает вопрос: Насколько окончателен приведенный выше результат в классе наиболее известных методов суммирования? В частности, верна ли теорема В для метода суммирования Абеля?

В настоящей работе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Для любого измеримого множества $G \subseteq (0,1)$ существует ряд Ω , который суммируется к $+\infty$ почти всюду на G методом Абеля, причем почти в каждой точке $t \in (0,1) \setminus G$ лишь конечное число членов ряда Ω отличны от нуля.

Из теорем А и 1 получаем

Теорема II. Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, существует ряд Ω , который суммируется почти всюду к $f(x)$ методом Абеля там, где $f(x)$ бесконечна и сходится почти всюду к $f(x)$ там, где $f(x)$ конечна.

Заметим, что метод доказательства, приводимый в настоящей работе, позволяет получить аналог теоремы I для любой переставленной системы Хаара. Откуда, учитывая теорему Б, получим аналог теоремы II для любой переставленной системы Хаара.

Следует отметить, что члены построенного нами ряда, удовлетворяющего утверждению теоремы I, не являются ограниченными в совокупности. Нам не известно, справедлива ли теорема I при естественных, в каком то смысле, ограничениях на коэффициенты ряда Ω (например, равномерная ограниченность членов ряда Ω). В связи с этим, отметим, что справедлива следующая

Теорема III. Существует такая перестановка системы Хаара, что ряды по этой, переставленной системе с ограниченными в совокупности членами не суммируются к $-\infty$ методом Абеля на множествах положительной меры.

Пусть $\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots$ система функций Хаара перенумерованная в порядке

$$\gamma_0^{(0)}(t), \gamma_0^{(1)}(t), \gamma_1^{(1)}(t), \gamma_1^{(2)}(t), \dots, \gamma_n^{(1)}(t), \dots, \gamma_n^{(2^n)}(t), \dots \quad (6) \text{ стр. 57}.$$

Положим $\pi_n = \{\Delta_{2^n-1}, \dots, \Delta_{2^n-1}\}$; $n \geq 1$, где Δ_i — есть носитель функции $\gamma_i(t)$; $i \geq 0$. Для любого полинома Хаара $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i \gamma_i(t)$, для нас будет более удобным ввести обозначение $P(t) = \sum_{i \in I(P)} a_i \gamma_i(t)$, где $I(P)$ множество тех i ; $0 \leq i \leq n$, для которых $a_i \neq 0$.

Обозначим

$$\overline{\text{ind}} P = \max_{i \in I(P)} |i| \quad \text{и} \quad \underline{\text{ind}} P = \min_{i \in I(P)} |i|.$$

Лемма 1. Для любого открытого множества $G \subseteq (0,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N(\varepsilon, G)$ и $M(\varepsilon)$ такие, что для любого $N > N(\varepsilon, G)$ существует полином $P(t) = \sum_{i \in I(P)} a_i \gamma_i(t)$ такой, что

1.1 $\underline{\text{ind}} P \geq N$,

1.2 для любого $i \in I(P)$ имеем $\Delta_i \in \bigcup_{k=0}^{M(\varepsilon)-1} \pi_{N+k}$ и $\Delta_i \subseteq G$,

1.3 $|E = \{t : P(t) = 1\}| \geq |G| - \varepsilon$, ($|G|$ — мера множества G),

1.4 $|a_i \gamma_i(t)| \leq 2^{M(\varepsilon)} - 1$, для $t \in (0,1)$ и для всех $i \in I(P)$,

1.5 для любого $t_0 \in E$ существует $i(t_0) \in I(P)$ такое, что $a_{i(t_0)} \gamma_{i(t_0)}(t_0) > 0$, $a_i \gamma_i(t_0) = 0$ при любом $i > i(t_0)$ и $a_i \gamma_i(t_0) \leq 0$ при любом $i < i(t_0)$.

Доказательство. Рассмотрим полином

$$P_0(t) = \gamma_1(t) + \frac{2}{\sqrt{2}} \gamma_2(t) + \dots + \frac{2^{k_0-1}}{\sqrt{2^{k_0-1}}} \gamma_{2^{k_0-1}}(t) = \sum_{i \in I(P_0)} a_i^{(0)} \gamma_i(t),$$

где k_0 удовлетворяет неравенству

$$1/2^{k_0-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что $P_0(t) = 1$ для $t \in (0, 1 - 1/2^{k_0})$, $|a_i^{(0)} \gamma_i(t)| \leq 2^{k_0-1}$ для $t \in (0, 1)$ и для всех $i \in I(P_0)$. Ясно также, что $P_0(t)$ удовлетворяет условию 1.5 для всех $t \in \left(0, 1 - \frac{1}{2^{k_0}}\right)$.

Положим $M(\varepsilon) = k_0$ и возьмем $N(\varepsilon, G)$ таким, чтобы

$$\sum_{\Delta \in \pi_N(\varepsilon, G), \Delta \subset G} |\Delta| > |G| - \varepsilon/2.$$

Далее, для любого $N \geq N(\varepsilon, G)$ положим

$$I_N = \{i : \Delta_i \subset G, \Delta_i \in \pi_N\}$$

и

$$P(t) = \begin{cases} P_0\left(\frac{t - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}\right), & \text{если } t \in \Delta_i = (\alpha_i, \beta_i); i \in I_N(\varepsilon, G) \\ 0, & \text{в остальных точках } (0, 1). \end{cases}$$

Легко убедиться, что полином $P(t)$ удовлетворяет утверждениям леммы 1.

Для любого полинома $P(t) = \sum_{i \in I(P)} a_i \gamma_i(t)$ и любого $x \in (0, 1)$ положим

$$P(x; t) = \sum_{i \in I(P)} x^{i-t} a_i \gamma_i(t), \text{ где } i_0 = \underline{\text{ind}} P$$

$$A[x; P(t)] = \sum_{i \in I(P)} x^i a_i \gamma_i(t).$$

Лемма 2. Для любых последовательностей положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, и открытых множеств $\{G_k\}_1^\infty$, $G_k \subset (0, 1)$ существуют последовательности: положительных чисел $\{x_k\}_1^\infty$; $x_k \uparrow 1$, полиномов $\{P_k(t)\}_1^\infty$ и множеств $\{E_k\}_1^\infty$; $E_k \subset G_k$ такие, что

$$2.1 \quad \underline{\text{ind}} P_i < \underline{\text{ind}} P_j \text{ при } i < j; i, j = 1, 2, \dots,$$

а для любого $k \geq 1$ имеют место:

$$2.2 \quad \Delta_i \subset G_k \text{ для всех } i \in J(P_k),$$

$$2.3. \quad P_k(x_k; t) \geq 1 \text{ для } t \in E_k; |E_k| \geq |G_k| - \varepsilon_k,$$

$$2.4. \quad |A[x; P_k(x_k; t)]| \leq \frac{1}{2^k} \text{ при } x \leq x_k, \text{ для } t \in (0, 1),$$

$$2.5. \quad |A[x; P_k(x_k; t)]| \geq 1 - \frac{1}{2^k} \text{ при } x \geq x_{k-1}, \text{ для } t \in E_k.$$

2.6. $A|x; P_k(x_k; t)| > 0$ при $x \geq x_k$, для $t \in E_k$.

Прежде чем перейти к доказательству леммы 2, сделаем одно Замечание 1. Пусть полином $P(t) = \sum_{i \in I(P)} a_i \gamma_i(t)$ в некоторой точке $t_0 \in (0, 1)$ удовлетворяет условию (1.5). Тогда для любых $x_0 \in (0, 1)$ и $q > 0$, если $\sum_{i \in I(P)} x_0^i a_i \gamma_i(t_0) \geq q$, то $\sum_{i \in I(P)} x^i a_i \gamma_i(t_0) \geq q$ при всех $x > x_0$, а если $\sum_{i \in I(P)} x_0^i a_i \gamma_i(t_0) \leq q$, то $\sum_{i \in I(P)} x^i a_i \gamma_i(t_0) \leq q$ при всех $x < x_0$. Действительно. Поскольку полином $P(t)$ в точке t_0 удовлетворяет условию (1.5), то

$$P(t_0) = \sum_{i \in I'(P)} a_i \gamma_i(t_0) + a_{i(t_0)} \gamma_{i(t_0)}(t_0)$$

причем, для всех $i \in I'(P)$ имеем, $i < i(t_0)$ и $a_i \gamma_i(t_0) \leq 0$. Откуда, при $x > x_0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I'(P)} x^i a_i \gamma_i(t_0) &= \sum_{i \in I'(P)} x^i a_i \gamma_i(t) + x^{i(t_0)} a_{i(t_0)} \gamma_{i(t_0)}(t_0) = \\ &= \sum_{i \in I'(P)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^i x_0^i a_i \gamma_i(t_0) + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{i(t_0)} x_0^{i(t_0)} a_{i(t_0)} \gamma_{i(t_0)}(t_0) > \\ &> \left(\frac{x}{x_0}\right)^{i(t_0)} \sum_{i \in I'(P)} x_0^i a_i \gamma_i(t_0) \geq \left(\frac{x}{x_0}\right)^{i(t_0)} q \geq q. \end{aligned}$$

Второе утверждение замечания 1 проверяется аналогично. Доказательство леммы 2.

В качестве x_1 возьмем любое число из $(0, 1)$. Для ε_1 и G_1 согласно лемме 1 существуют числа $N(\varepsilon_1, G_1)$ и $M(\varepsilon_1)$ такие, что для любого $N > N(\varepsilon_1, G_1)$ существует полином $P(t)$ удовлетворяющий условиям (1.1)–(1.5). Возьмем натуральное число N_1 такое что

$$N_1 > N(\varepsilon_1, G_1) \quad \text{и} \quad x_1^{N_1} \leq \frac{1}{2^{M(\varepsilon_1)}(2^{M(\varepsilon_1)} - 1)}. \quad (2)$$

Соответствующий полином обозначим через $P_1(t)$ и положим $E_1 = \{t: P_1(t) = 1\}$. x_1 , $P_1(t)$ и E_1 удовлетворяют утверждениям леммы 2. (Схема проверки последнего утверждения будет приведена ниже).

Если для всех $i \leq k$ уже выбраны x_i , $P_i(t)$ и E_i удовлетворяющие утверждениям леммы 2, то x_{k+1} , $P_{k+1}(t)$ и E_{k+1} выберем следующим образом:

Поскольку $P_k(x_k; t) \geq 1$ для $t \in E_k$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} A|x; P_k(x_k; t)| \geq 1 \quad \text{для} \quad t \in E_k.$$

Возьмем $x_{k+1} \in (0, 1)$ такое, чтобы

$$x_{k+1} > x_k \quad \text{и} \quad A|x; P_k(x_k; t)| > 1 - \frac{1}{2^k} \quad \text{при} \quad x \geq x_{k+1}, \quad \text{для} \quad t \in E_k \quad (3)$$

далее, возьмем натуральное число N_{k+1} такое, что

$$\left. \begin{aligned} N_{k+1} &> \max \{ N(\varepsilon_{k+1}, G_{k+1}), \text{ind } P_k \} \\ x_{k+1}^{N_{k+1}} &\leq [2^{k+1} M(\varepsilon_{k+1})(2^{M(\varepsilon_{k+1})} - 1)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Полином соответствующий N_{k+1} по лемме 1 обозначим через $P_{k+1}(t)$ и положим $E_{k+1} = \{t: P_{k+1}(t) = 1\}$.

Убедимся, что число x_{k+1} , полином $P_{k+1}(t)$ и множество E_{k+1} удовлетворяют утверждениям леммы 2. Согласно (1.2) имеем $E_{k+1} \subset G_{k+1}$. Далее, (2.1) и (2.2) следуют из (4) и (1.2), а (2.3) следует из (1.3) и (1). Чтобы убедиться, что x_{k+1} , $P_{k+1}(t)$ и E_{k+1} удовлетворяют условиям (2.4) и (2.6) заметим, что

$$A\{x_{k+1}; P_{k+1}(x_{k+1}; t)\} = x_{k+1}^{\text{ind } P_{k+1}} P_{k+1}(t) \quad (\text{см. (1) и (1')}).$$

Откуда (2.4) получается из (1.1), (4) и замечания 1, а (2.6) из замечания 1, поскольку $P_{k+1}(t) = 1$ для $t \in E_{k+1}$ и если $P_{k+1}(t)$ удовлетворяет условию (1.5), то и $P_{k+1}(x_{k+1}, t)$ удовлетворяет условию (1.5). Итак x_{k+1} , $P_{k+1}(t)$ и E_{k+1} удовлетворяют утверждениям леммы 2. (Случай $k=1$ проверяется аналогично). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Если $|G| = 0$, то теорема 1 тривиальна.

$$\text{Пусть } |G| > 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \quad (\varepsilon_k > 0). \quad (5)$$

Возьмем последовательность открытых множеств $\{G_k\}_1^{\infty}$, таких, что

$$G \subset G_k \subset (0, 1); \quad (k > 1), \quad G_i \subset G_j \quad \text{при } i < j \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |G_k| = |G|. \quad (6)$$

Для $\{\varepsilon_k\}$ и $\{G_k\}$ найдем последовательности $\{x_k\}$, $\{P_k(t)\}$ и $\{E_k\}$ удовлетворяющие утверждениям леммы 2. Рассмотрим ряд полученный из выражения

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_k; t)$$

раскрытием скобок (см. 2.1)

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,i}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_k; t)$$

и докажем, что ряд Ω удовлетворяет утверждениям теоремы 1.

Обозначим для любого $x \in (0, 1)$

$$A\{x; \Omega(t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i c_{i,i}(t)$$

и проверим, что

а) для любого фиксированного $x \in (0, 1)$ ряд Ω сходится почти всюду на G .

б) $\lim_{x \rightarrow 1} A\{x; \Omega(t)\} = +\infty$ для п. в. $t \in G$.

в) в почти каждой точке $t \in (0, 1)/G$ лишь конечное число членов ряда Ω отличны от нуля.

Пусть x_0 фиксированная точка из $(0, 1)$ и $x_0 > x_1$. Тогда $x_k < x_0 < x_{k+1}$ для некоторого $k_0 \geq 1$. Из (2.4) имеем

$$|A|x_0; \Omega(t)|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A|x_0; P_k(x_k; t)|| = \sum_{k=1}^{k_0} |A|x_0; P_k(x_k; t)|| + \\ + \sum_{k > k_0+1} |A|x_0; P_k(x_k; t)|| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |A|x_0; P_k(x_k; t)|| + \sum_{k > k_0+1} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

для $t \in (0, 1)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и k_1 удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k > k_1} \varepsilon_k < \varepsilon \quad (\text{см. (5)}).$$

Тогда из соотношений (2.2), (2.3), (6) и

$$|\bigcap_{k > k_1} (E_k \cap G)| = |G \setminus \bigcup_{k > k_1} (G \setminus E_k)| \geq |G| - \sum_{k > k_1} |G \setminus E_k|$$

получим

$$|\bigcap_{k > k_1} (E_k \cap G)| > |G| - \varepsilon. \quad (7)$$

Пусть q натуральное число, причем

$$q > \sup_{x, t \in (0, 1)} \sum_{i < k_1} |A|x; P_i(x_i; t)|| \quad (8)$$

Тогда для любого $M > 0$ и $t \in \bigcap_{k > k_1} E_k$ при $x \geq x_{M+q+k_1+2}$; учитывая (2.4), (2.5), (2.6) и (8) будем иметь

$$|A|x; \Omega(t)|| = \sum_{i=k_1}^{\infty} |A|x; P_i(x_i; t)|| + \sum_{j=k_1+1}^{M+q+k_1+1} |A|x; P_j(x_j; t)|| + \\ + \left| \sum_{k > M+q+k_1+2} |A|x; P_k(x_k; t)|| \right| \geq M + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = M.$$

Откуда получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} |A|x; \Omega(t)|| = +\infty \quad \text{для } t \in \bigcap_{k > k_1} E_k,$$

но поскольку ε произвольное число, то из (7) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} |A|x; \Omega(t)|| = +\infty \quad \text{для п. в. } t \in G.$$

Итак $|A|x; \Omega(t)||$ удовлетворяет утверждениям а) и б). Ряд Ω удовлетворяет так же и утверждению в) согласно построению $P_k(t)$, $k \geq 1$ и соотношениям (2.2) и (6). Теорема 1 доказана.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

Հաարի շարքերի Արելի եղանակով $+\infty$ -ի հանրագումարելիության մասին

Ներկա հոդվածում բերված է հետևյալ թեորեմի ապացույցը:

Թեորեմ 1.—Ամեն մի $G \subseteq (0, 1)$ շափելի բազմության համար գոյություն ունի այնպիսի Հաարի շարք, որը G -ի համարյա բոլոր կետերում Արելի եղանակով հանրագումարվում է $+\infty$ -ի, բնդ որում G -ի լրացման համարյա բոլոր կետերում վերահիշյալ շարքի միայն վերջավոր հանադությանը անդամներ են 0 -ից տարբեր:

Նշվում է, որ թեորեմ 1-ի հանգույնը ճշմարիտ է նաև Հաարի ցանկացած տեղափոխված սիստեմի համար: Որտեղից, օգտվելով (¹ էջ 134) աշխատանքում բերված մի թեորեմից, ստանում ենք.

Թեորեմ 2.—Ամեն մի շափելի $f(x)$ ֆունկցիայի համար, Հաարի ամեն մի տեղափոխված սիստեմով կարելի է կառուցել շարք, որը Արելի եղանակով հանրագումարվում է $f(x)$ -ի համարյա ամենուրեք այն բազմության վրա, որտեղ $f(x)$ -ը անվերջ է և գուցամիտում է $f(x)$ -ին համարյա ամենուրեք այն բազմության վրա, որտեղ $f(x)$ -ը վերջավոր է:

Անհրաժեշտ է նշել, որ թեորեմ 1-ի պահանջներին բավարարող շարքի անդամների մոդուլների մաքսիմումները անվերջ աճում են: Մեզ չի հաջողվել կառուցել Հաարի շարք, որը հանրագումարվի Արելի եղանակով $+\infty$ -ի դրական չափի բազմության վրա և որի զործակիցները բավարարեն որևէ բնական սահմանափակության պայմանների:

Այս կապակցությամբ նշվում է, որ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.—Իոյություն ունի Հաարի սիստեմի այնպիսի տեղափոխություն, որ այդ տեղափոխված սիստեմով շարքերը չեն հանրագումարվում Արելի եղանակով $+\infty$ -ի. եթե միայն շարքի անդամների մոդուլների մաքսիմումները սահմանափակ են միևնույն րվով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Талалаян, Представление измеримых функций рядами, УМН, т. 15, № 5, (1960). ² А. А. Талалаян, Известия АН сер. матем. 24, 567—604. (1960). ³ Ф. Г. Арутюнян, ДАН Арм. ССР, том XLII, № 3, 134—135 (1966). ⁴ А. А. Талалаян, Ф. Г. Арутюнян, Матем. сб. 66 (108) 2 240—247 (1965). ⁵ Л. А. Шагинян, ДАН Арм ССР, т. 57, № 4, 206—211 (1973). ⁶ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958.