ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 5

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

О симметричном вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость с вертикальным полубесконечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 18/VI 1973)

Рассматривается плоская симметричная контактная задача для упругой, изотропной полуплоскости, разрезанной вдоль вертикальной оси (ох), начиная с расстояния a от горизонтальной границы. На участках a горизонтальной границы полуплоскости приложены жесткие штампы с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси разреза.

Предполагается, что трение между штампами и полуплоскостью отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампов свободна от внешних усилий, а в полубесконечном разрезе действует только нормальное давление (рис. 1)

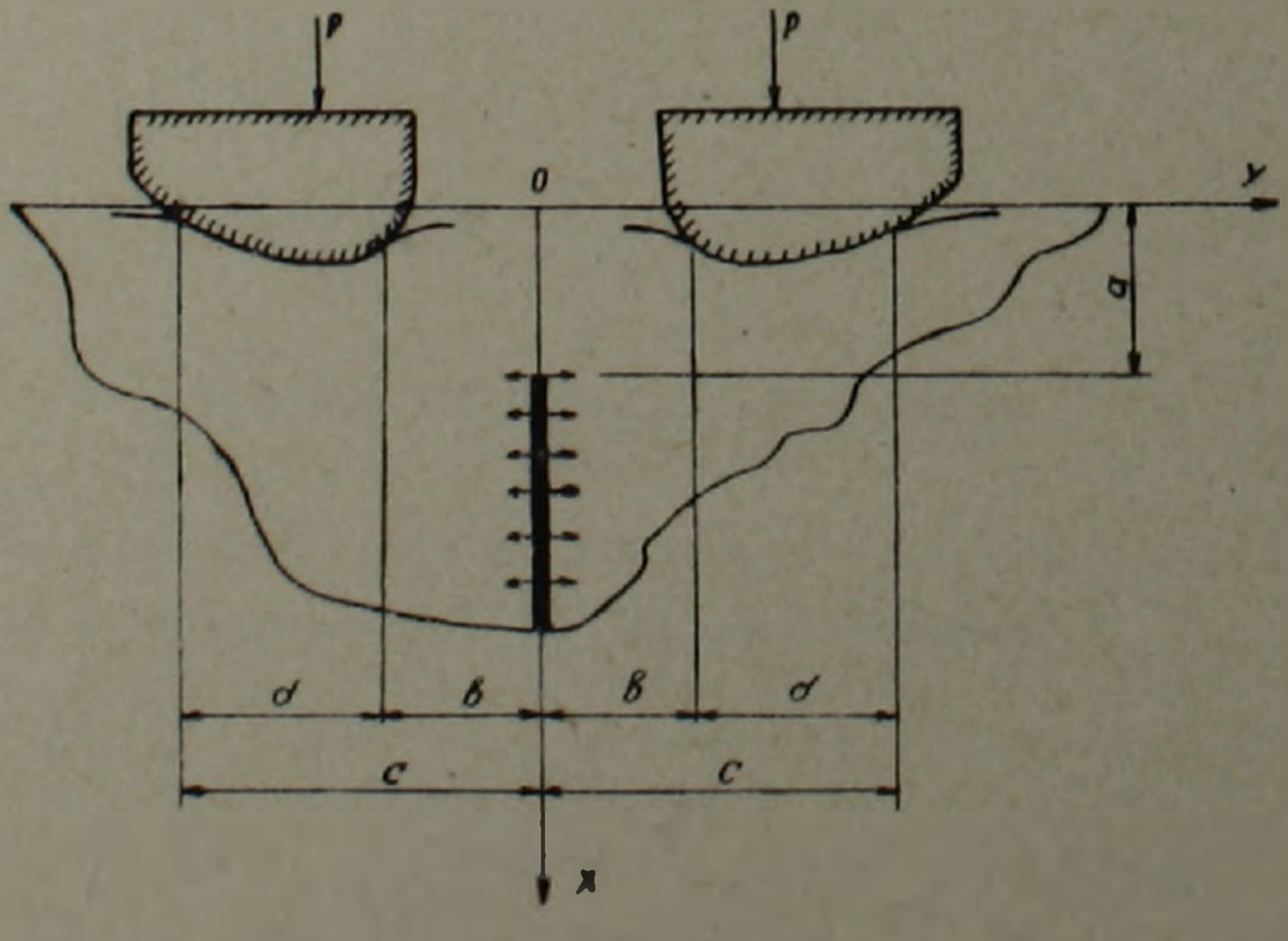

Рис. 1

Задача решена методом Фурье.

Решение задачи сводится к системе «парных» и «тройных» интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

В частных случаях, когда $a \to \infty$ или $a \to 0$, соответственно получаются симметричная контактная задача с двумя жесткими одинаковыми штампами для полуплоскости без разреза, которая рассматривалась в работах [1,2], и контактная задача для квадранта [3].

В силу симметрии граничных условий достаточно рассматривать только область квадранта ($0<x<\infty$; $0<y<\infty$). При этом граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\left.\begin{array}{l}
\tau_{xy}(0,y)=0 \;\; (0<y<\infty); \;\; \sigma_x(0,y)=0 \;\; (0<y<b; \; c<y<\infty) \\
u(0,y)=f_1(y) \;\; (b<y<c); \;\; \tau_{xy}(x,0)=0 \;\; (0<x<\infty) \\
v(x,0)=0 \;\; (0<x<a); \;\; \sigma_y(x,0)=f_2(x) \;\; (a<x<\infty)
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Бигармоническую функцию напряжений для решения рассматриваемой задачи берем в виде сумм двух интегралов Фурье (12)

Напряжения и перемещения определяются при помощи известных формул [1]:

$$\sigma_x(x,y) = -\int_0^\infty \alpha^2 \left[A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)\right] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty \beta^2 \left[C(\beta) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)\right] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta;$$

$$\sigma_y(x,y) = \int_0^\infty \alpha^2 \left[A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)\right] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$\int_0^\infty \beta^2 \left[C(\beta) + \beta y D(\beta)\right] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta;$$

$$\tau_{xy}(x,y) = -\int_0^\infty \alpha^2 \left[A(\alpha) - B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)\right] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+\int_0^\infty \beta^2 \left[C(\beta) - D(\beta) + \beta y D(\beta)\right] e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta;$$

$$u(x,y) = \frac{1}{E}\left\{\int_0^\infty \alpha\,[A(\alpha)(1+\nu) + B(\alpha)(1-\nu) + \alpha x B(\alpha)(1+\nu)]\, e^{-\alpha x}\cos(\alpha y)\,d\alpha -\right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \beta\,[C(\beta)(1+\nu) - 2D(\beta) + \beta y D(\beta)(1+\nu)]\; e^{-\beta y}\cos(\beta x)\,d\beta\right\} - a_0 y + b_0;$$

(2)

$$v(x,y) = \frac{1}{E}\left\{\int_0^\infty \alpha\,[A(\alpha)(1+\nu) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)(1+\nu)]\; e^{-\alpha x}\sin \alpha(y)\,d\alpha +\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \beta\,[C(\beta)(1+\nu) + D(\beta)(1-\nu) + \beta y D(\beta)(1+\nu)]\,e^{-\beta y}\sin(\beta x)\,d\beta\right\} + a_0 x + c_0$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку имеем

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0. \tag{3}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1), получаем

$$C(\beta) = D(\beta) \tag{4}$$

$$B(\alpha) = A(\alpha) - \frac{4}{\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{\beta^4 D(\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\beta \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \beta D(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = 0 \quad (0 < x < a)$$

$$\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)\sin(\beta x)\,d\beta = -f_2(x) + \int_0^\infty \alpha^2[A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\,d\alpha$$

$$(a < x < \infty) \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha = (0 < y < b)$$

$$\alpha A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha = \frac{E}{2} f_1(y) + y\int_0^\infty \beta^2 D(\beta)\,e^{-\beta y}\,d\beta \quad (b < y < c)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha = 0 \quad (c < y < \infty)$$

(7)

Из (6) выразим функцию $D(\beta)$ через функцию $A(\alpha)$. Подобные

„парные" уравнения рассматривались в работах ([6–8]).

Используя результаты работы ([8]), из (6) для функции $D(\beta)$ получаем

$$
C(\beta)=\frac{2}{\pi}\beta\int_0^\infty r\varphi_2(r)\;J_0(\beta r)dr+\frac{2}{\pi}\beta\int_0^\infty \alpha_2 A(\alpha)\,d\alpha\int_0^\infty rK_0(\alpha r)\;J_0(\beta r)dr-
$$

$$
-\frac{4}{\pi}\beta\int_0^\infty \alpha^2 B(\alpha)\,d\alpha\int_a^\infty rK_0(\alpha r)\;J_0(\beta r)dr+
$$

$$
+\frac{2}{\pi}\beta\int_0^\infty \alpha^3 B(\alpha)\,d\alpha\int_a^\infty r^2K_1(\alpha r)\;J_0(\beta r)dr, \tag{8}
$$

где

$$
C(\beta)=\beta^2 D(\beta),\quad \varphi_2(r)=-\int_r^\infty\frac{f_2(x)dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \tag{9}
$$

$K_i(\alpha r)$—функции Макдональда;

$J_0(\beta r)$—функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Подставляя значение $B(\alpha)$ из (5) в (8) получаем

$$
G(\gamma)=\frac{2}{\pi}\gamma\int_a^\infty r\varphi_2(r)J_0(\gamma r)dr+
$$

$$
+\frac{2}{\pi}\gamma\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\,d\alpha\int_a^\infty r[\alpha rK_1(\alpha r)-K_0(\alpha r)]\;J_0(\gamma r)dr+
$$

$$
+\frac{16}{\pi^2}\gamma\int_0^\infty \beta^2 G(\beta)d\beta\int_0^\infty\frac{\alpha d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\int_a^\infty r[K_0(\alpha r)-
$$

$$
-\frac{\alpha r}{2}K_1(\alpha r)]\;J_0(\gamma r)dr. \tag{10}
$$

„Тройные" интегральные уравнения, подобные (7), рассматривались в работах ([9–12]).

Следуя (12), из (7) получаем

$$
A_n=2\xi(0)\,\sin\frac{\delta}{2}+
$$

$$
+4n(1-n)\,\sin^3\frac{\delta}{2}\int_0^1 S\xi(S)\;F\left(1+n,-n;2;\;S^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)dS, \tag{11}
$$

где

$$A_n = (-1)^{n+1} A_n^*, \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \; J_{2n-1}(c\alpha) = \alpha A(\alpha), \tag{13}$$

$$\xi(S) = \frac{4}{\pi} \int_0^S \frac{z\varphi_1{}^1 \left[2\arcsin\,(z\sin\delta/2)\right]}{\sqrt{S^2-z^2}} dz + Q, \tag{14}$$

$$c.\ \cos\frac{\delta}{2} = b, \tag{15}$$

$$\varphi_1[2\arcsin\,(z\sin\delta/2)] = -\frac{Ec}{4} z\sin\frac{\delta}{2} f_1(c\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2}) -$$

$$-\frac{c^2}{2} z\ \sin\frac{\delta}{2}\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2} \int_0^\infty G(\beta) e^{-\beta c\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\delta}{2}}} d\beta, \tag{16}$$

$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд.

Q — постоянная, которая должна быть найдена путем подстановки (13), (11) и (14) во второе уравнение (7) при $y=b$.

Подставляя значение $A(\alpha)$ из (13) в (10) с учётом (12); (11); и (16), для определения функции $G(\beta)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

$$G(\gamma) = \Omega(\gamma) + \int_0^\infty G(\beta)\ K(\gamma, \beta) d\beta, \tag{17}$$

где

$$\Omega(\gamma) = \frac{2}{\pi}\gamma \int_a^\infty r\varphi_2(r)\ J_0(\gamma r) dr +$$

$$+\frac{8}{\pi}\gamma\sin^3\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-n)}{(-1)^{n+1}}\int_0^1 S\left[Q - \frac{Ec}{\pi}\sin\frac{\delta}{2}\int_0^S \frac{zf_1\left(c\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\delta}{2}}\right)dz}{\sqrt{S^2-z^2}}\right. \times$$

$$\times F\left(1+n, -n;\ 2;\ S^2\sin^2\frac{\delta}{2}\right) dS \int_0^\infty \alpha J_{2n-1}(c\alpha) d\alpha \int_a^\infty r[\alpha r K_1(\alpha r) -$$

$$-K_0(\alpha r)]\ J_0(\gamma r) dr \tag{18}$$

$$K(\gamma, \beta) = \frac{16}{\pi^2}\gamma\beta^2 \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} \int_a^\infty r\left[K_0(\alpha r) - \frac{\alpha r}{2} K_1(\alpha r)\right]\ J_0(\gamma r) dr -$$

$$-\frac{16}{\pi^2}\gamma c^2 \sin^4\frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{(-1)^{n+1}}\int_0^1 S\left[\int_0^S \frac{z^2\sqrt{1-z^2\sin^2\frac{\delta}{2}}\, e^{-\beta c\sqrt{1-z^2\sin^2\delta/2}} dz}{\sqrt{s^2-z^2}}\right].$$

$$\times F(1+n,-n;\ S^2\sin^2\delta/2)\,ds\int_0^\infty \alpha J_{2n-1}(c\alpha)\,d\alpha\int_a^\infty r\left[\alpha r K_1(\alpha r)-\right.$$

$$\left.-K_0(\alpha r)\right] J_0(\gamma r)\,dr \qquad (19$$

Очевидно, что функция $\Omega(\gamma)$ ограничена сверху и стремится к нулю когда $\gamma\to\infty$.

Используя значения следующих интегралов (5):

$$\int_0^\infty rK_0(\alpha r)\,J_0(\gamma r)\,dr = \frac{1}{\alpha^2+\gamma^2};$$

$$\int_0^\infty r^2K_1(\alpha r)\,J_0(\gamma r)\,dr=\frac{2\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)^2}; \qquad (20)$$

$$\int SF(1+n,\ -n;\ 2;\ S^2\sin^2\delta/2)\,ds=\frac{1}{2}F(1+n,\ -n;\ 2,\ \sin^2\delta/2);$$

и результатов (12) показывается, что интегральное уравнение (17) можно решить методом последовательных приближений. Далее по формулам (16), (14), (11), (13) и (4) последовательно можно определить все искомые функции. Напряжения и перемещения по известным формулам (2) будут определены в любой точке полуплоскости.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կիսանվերջ ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված կիսահարթության համաչափ ճնշումը երկու միատեսակ կոշտ դրոշմներով

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության վրա կիսանվերջ, ուղղաձիգ ճեղքով թուլացված իզոտրոպ, առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։

Կիսահարթության եզրին ճնշում են վերջավոր հիմքերով, ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված միատեսակ դրոշմները։ Ենթադրվում է, որ շփումը՝ դրոշմների և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմներից դուրս ազատ է արտաքին ուժերից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում ազդում են միայն նորմալ լարումները։

Խնդիրը բերվում է «զույգ» և «երիցս» ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Тоноян*, «Известия АН Арм. ССР», серия физ.-мат. наук. т. 17, № 2 (1964). [2] *Л. А. Галин*, Контактная задача теории упругости, ГИТТЛ, М., 1953. [3] *В. С. Тоноян*, ДАН Арм. ССР, т. 37, № 3 (1963). [4] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. [5] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. [6] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 28, вып. 6 (1964).

[7] *I. N. Sneddon*, Proc Glasgon math Ass. vol· 4 (108—110) (1960) [8] *В. С. Тоноян*, „Известия АН Арм. ССР," Механика, т. XXI, №3 (1968). [9] *G. I. Tranter*, Proc Glasgon math Ass vol 4. pt. 4 (1960) [10] *Г. М. Валов*, „Известия АН СССР," МТТ, №5 (1972). [11] *А. А. Баблоян, С. М. Мхитарян*, „Известия АН Арм. ССР," Механика, т. XII, №6 (1969). [12] *В. С. Тоноян*. ДАН Арм. ССР, т. 37, №5 (1963).