ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян

Колебания и устойчивость токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 23/IV 1973)

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах ([1,2]), рассматриваются колебания и устойчивость упругих пластин, несущих постоянный ток при наличии постоянного поперечного магнитного поля. Получены зависимости коэффициента затухания и частоты колебаний от интенсивностей магнитного и электрического полей. Приводится условие устойчивости пластинки.

1. Изотропная тонкая токонесущая пластинка толщины $2h$ помещена в магнитном поле. Упругие и электрические свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице. Токи смещения в пластинке пренебрегаются по сравнению с токами проводимости.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Линейная задача магнитоупругих колебаний токонесущей пластинки, при справедливости гипотезы Кирхгофа, приводится к решению следующих уравнений ([1,2]):

В области, занимаемой пластинкой ($|z|\leqslant h$):
уравнения электродинамики движущейся среды

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{1.1}$$

уравнение движения пластинки

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Z+\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}. \tag{1.2}$$

Здесь $\vec{h}$, $\vec{e}$—соответственно векторы индуцированного магнитного и электрического полей; $\vec{H}_0$—вектор напряженности начального магнитного поля; c—скорость света в вакууме; Z, m_x и m_y—сила и моменты электромагнитного происхождения; $U(u_x, u_y, w)$—вектор перемещения частиц пластинки.

В области, окружающей пластинку ($|z|>h$):
уравнения электродинамики для вакуума

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0, \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) связаны общими граничными условиями на поверхностях пластинки, приведенными в работах [1,2]. Известно, что в движущейся проводящей среде при наличии магнитного поля действует объемная сила Лоренца. В предположениях данной работы эта сила выражается формулой

$$\vec{R}=\frac{\sigma}{c}\left[\vec{E}_0\times\vec{H}_0+\vec{E}_0\times\vec{h}+\vec{e}\times\vec{H}_0+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right)\times\vec{H}_0\right], \tag{1.4}$$

где $\vec{E}_0$—вектор напряженности начального электрического поля.

На основе (1.4) сила и моменты, входящие в уравнение (1.2), определяются следующим образом:

$$Z=\int_{-h}^{h}R_z dz,\qquad m_x=\int_{-h}^{h}R_x z dz,\qquad m_y=\int_{-h}^{h}R_y z dz. \tag{1.5}$$

Отметим также, что слагаемое $\sigma c^{-1}\vec{E}_0\times\vec{H}_0$ в выражении силы Лоренца не зависит от возмущений и может привести к возникновению усилий в срединной плоскости пластины, которые необходимо учитывать в задачах устойчивости ограниченных пластин.

Начальное электромагнитное поле необходимо найти, решая задачу электро-магнитостатики. В частности, векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ в области, занимаемой пластинкой, должны удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{H}_0=\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}_0,\quad \operatorname{rot}\vec{E}_0=0,\quad \operatorname{div}\vec{H}_0=0,\quad \operatorname{div}\vec{E}_0=0, \tag{1.6}$$

В работах [1,2] предложены обоснованные гипотезы, которые существенно облегчают решение задач магнитоупругости. Эти гипотезы сформулированы следующим образом.

Тангенциальные компоненты вектора напряженности индуцированного электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля по толщине пластинки остаются неизменными, т. е.

$$e_x=\varphi(x,\ y,\ t),\quad e_y=\psi(x,\ y,\ t),\quad h_z=f(x,\ y,\ t). \tag{1.7}$$

2. Пусть бесконечная пластинка с постоянным электрическим током в направлении оси x помещена в постоянное магнитное поле с вектором напряженности, перпендикулярным срединной плоскости пластинки.

Решая задачу магнитостатики, найдем

$$\vec{E}_0=\begin{cases} E_{0x}\hat{i} & \text{при } |z|<h \\ 0 & \text{при } |z|>h \end{cases}$$

$$\vec{H}_0=\begin{cases} -\dfrac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}h\hat{j}+H_{0z}\hat{k} & \text{при } z>h \\ -\dfrac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}z\hat{j}+H_{0z}\hat{k} & \text{при } |z|<h \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}h\hat{j}+H_{0z}\hat{k} & \text{при } z<-h \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$—единичные векторы в направлении координатных линий, E_{0x}, H_{0z}—заданные напряженности электрического и магнитного полей.

Используя гипотезы (1.7) так, как это делается в работах ([1,2]), уравнение движения пластинки приводим к следующему виду:

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{2h^3}{3}\,\frac{\sigma}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[H_{0z}^2\Delta w-\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2 w\right], \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) показывает, что с точностью гипотез (1.7) индуцированное электромагнитное поле не оказывает влияния на характер магнитоупругих колебаний.

Для удобства, ограничимся рассмотрением колебаний, не зависящих от координаты x. Представляя решение уравнения (2.2) в виде

$$w=e^{i\omega t}\sin\lambda_y y,\quad \lambda_y=m\pi/a, \tag{2.3}$$

получаем характеристическое уравнение, определяющее частоту колебаний

$$\Omega^2+\frac{\sigma_0}{3}\left[(\lambda_y h)^2\alpha_1+\alpha_2\right]\Omega+1=0. \tag{2.4}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\Omega=i\omega/\Omega_0,\quad \Omega_0^2=Dm^4\pi^4/(2\rho h a^4),\quad \sigma_0=4\pi\sigma/\Omega_0$$

$$\alpha_1=V_1^2/c^2,\quad \alpha_2=V_2^2/c^2,\quad V_1^2=H_{0z}^2/(4\pi\rho),\quad V_2^2=(4\pi\sigma h E_{0x})^2/(4\pi\rho c^2)$$

Ω_0—частота собственных колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля.

Из решения уравнения (2.4) вытекает, что наличие электромагнитного поля приводит к затуханию колебаний пластинки по экспоненциальному закону, причем если

$$\beta=\frac{\sigma_0}{6}\left[(\lambda_y h)^2\alpha_1+\alpha_2\right]<1, \tag{2.5}$$

то затухание возмущений имеет колебательный характер с коэффициентом затухания β и с частотой $(1-\beta^2)^{1/2}$. В противном случае возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $\beta+(\beta^2-1)^{1/2}$. Параметр β дает отношение силы Лоренца к упругой силе. Следовательно, если упругая сила преобладает, то затухание имеет колебательный характер. Если же преобладает сила Лоренца, то возмущения затухают без колебаний.

Для оценки точности полученных результатов рассмотренная задача была решена в точной постановке, без использования гипотез (1.7). Были найдены компоненты индуцированного электромагнитного поля. Для частоты колебаний получено трансцендентное уравнение, которое ввиду громоздкости здесь не приводится. При разложении точного решения в ряд по степеням $\nu z(\nu^2=\lambda_y^2+i\omega 4\pi\sigma/c)$ и после пренебрежения членов порядка $|\nu^2|h^2$ по сравнению с единицей, уравнение, определяющее частоту колебаний, в точности, совпадает с уравнением (2.3). Таким образом, еще раз подтверждается вывод о том, что гипотезы магнитоупругости справедливы с точностью $|\nu^2|h^2$ по сравнению с единицей ([1,2]).

3. Рассмотрим предыдущую задачу для пластинки-полосы шириной $a(-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant y\leqslant a)$. Пластинка закреплена по краю $y=a$, а край $y=0$ свободен. Предполагается, что ширина пластинки настолько большая, что статическое магнитное поле внутри пластинки можно приближенно определить по формулам (2.1).

В этом случае в статическом положении на пластинку действует постоянная объемная сила $c^{-1}\sigma E_{0x}H_{0z}$, направленная по оси Oy. Наличие объемной силы приводит к возникновению нормальных напряжений

$$\sigma_y=\frac{\sigma}{c}E_{0x}H_{0z}y,$$

которые легко определяются из уравнений статики упругого тела и условий закрепления на краях пластинки.

При указанных предположениях и при использовании гипотез (1.7), уравнение движения пластинки приводится к виду

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}E_{0x}H_{0z}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial w}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left|H_{0z}^2\Delta w-\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2 w\right|. \tag{3.1}$$

Задача колебаний пластинки, рассмотренная в предыдущем пункте, показывает, что члены правой части уравнения (3.1) имеют демпфирующий характер.

Для выяснения вопроса устойчивости пластинки ограничимся статической устойчивостью в случае, когда колебания не зависят от координаты x. Имея в виду (3.1), уравнение и граничные условия рассматриваемой статической задачи приводятся к виду

$$D\frac{d^4w}{dy^4}+\frac{2\sigma h}{c}E_{0x}H_{0z}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right)=0$$

$$\frac{d^2w}{dy^2}=0, \qquad \frac{d^3w}{dy^3}=0 \qquad \text{при} \quad y=0 \tag{3.2}$$

$$w=0, \qquad \frac{dw}{dy}=0 \qquad \text{при} \quad y=a.$$

Решение задачи (3.2) записывается при помощи функций Бесселя ([3]). Наименьшее значение аргумента, при котором функция

$$I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\,\frac{\sigma h a^3}{cD}\,E_{0x}H_{0z}\right)$$

обращается в нуль, дает критические значения напряженностей электрического и магнитного полей, приводящие к потере устойчивости пластинки. После некоторых вычислений для критических значений получаем

$$(E_{0x}H_{0z})_{*}=3{,}92\,\frac{D}{a^3}\,\frac{c}{\sigma h}. \tag{3.3}$$

Таким образом установлена возможность потери устойчивости токонесущей пластинки в поперечном магнитном поле, в зависимости от значения произведения напряженностей заданных электрического и магнитного полей.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

Հոսանքատար սալի տատանումները և կայունությունը ընդլայնական մագնիսական դաշտում

Աշխատանքում ստացված են վերջավոր էլեկտրահաղորդականություն ունեցող հոսանքատար սալի տատանումների հավասարումներն ընդլայնական մագնիսական դաշտում։ Ստացված հավասարումների հիման վրա ուսումնասիրված են անվերջ սալի տատանումները։ Ստացված է մարման գործակցի և տատանումների հաճախականության կախվածությունը մագնիսական և էլեկտրական դաշտերի լարվածություններից։

Հոսանքատար վերջավոր սալի դեպքում ցույց է տրված, որ ընդլայնական մագնիսական դաշտի առկայությունը կարող է առաջացնել սալի ստատիկական կայունության կորուստ։ Որոշված են մագնիսական և էլեկտրական դաշտերի լարվածությունների կրիտիկական արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян*, ПММ, т. 35, вып. 2 (1971). [2] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян*, ПММ, т. 37, вып. 1 (1973). [3] *А. С. Вольмир*, Устойчивость деформируемых систем, М., «Наука», 1967.