ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LVII 1973 5

УДК 519. 1

МАТЕМАТИКА

А. Г. Маркосян

О сжато-сохранном отображении графов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/V 1973)

Понятие сохранного отображения [1] впервые было определено Шенноном в связи с нахождением пропускной способности дискретного канала при нулевой ошибке [2]. В дальнейшем разными авторами были исследованы многие вопросы, связанные с существованием полного сжато-сохранного отображения [3] в графе. Это обусловлено тем, что из существования полного сжато-сохранного отображения (в дальнейшем под полным отображением будем понимать полное сжато-сохранное отображение) в графе G следует

$$\alpha(G\times H)=\alpha(G)\cdot\alpha(H)$$

Для любого графа H (теорема Шеннона), где $G\times H$ декартовое произведение графов, а $L(\,)$—число внутренней устойчивости.

Теорема 1. *В графах $G=(X, U)$ и $H=(Y, V)$ существует полное отображение тогда и только тогда, когда в графе $G\times H$ существует полное отображение и*

$$\alpha(G\times H)=\alpha(G)\cdot\alpha(H), \tag{1}$$

Необходимость. Пусть графы G и H обладают полными отображениями $\mathfrak{z}_G$ относительно S_G и $\mathfrak{z}_H$ относительно S_H. Докажем, что их декартовое произведение $G\times H$ также имеет полное отображение. Из теоремы Шеннона [1] следует равенство (1), поэтому $S_{G\times H}=S_G\times S_H$ является наибольшим внутренне устойчивым множеством (НВУМ) в графе $G\times H$.

Пусть

$$S_G=\{q_n, q_2,\ldots, q_{\alpha(G)}\},$$

$$S_H=\{h_1, h_2,\ldots, h_{\alpha(H)}\},$$

тогда

$$S_{G\times H}=\{q_i h_j / i=1,2,\ldots, \alpha(G),\ j=1,2,\ldots, \alpha(H)\}.$$

Обозначим через

$$X_i=\{x / x\in X,\ \mathfrak{z}_G(x)=q_i\}$$

$$i=1,2,\ldots,\alpha(G).$$

$$Y_j=\{y/y\in Y,\ \varphi_H(y)=h_j\}$$

$$j=1,2,\ldots,\alpha(H).$$

Подграф G_i графа G, порожденный множеством вершин X_i и подграф H_j графа H, порожденный множеством Y_j, полные, в силу чего их декартовое произведение $G_i\times H_j$ также будет полным. А это значит, что $G_i\times H_j$ можно сжать в одну вершину, сохраняя несмежность. Отсюда легко определить полное отображение $\varphi_{G\times H}$:

$$\varphi_{G\times H}(xy)=q_j h_i\ ,\ \text{если}\ x\in X_i\ ,\ y\in Y_j\ .$$

Достаточность. Здесь остаются в силе прежние обозначения S_G, S_H, $S_{G\times H}$.

Из равенства (1) следует, что $S_{G\times H}$ является НВУМ для графа $G\times H$. Пусть $\varphi_{G\times H}$ некоторое полное отображение в графе $G\times H$ относительно $S_{G\times H}$. Рассмотрим в графе $C\times H$ подграф, порожденный множеством вершин $X\times\{h_i\}$ для некоторого $h_i\in S_H$. Этот подграф имеет полное отображение, которое совпадает с отображением $\varphi_{G\times H}$ на множестве $X\times\{h_i\}$. Определим отображение φ_G относительно S_G следующим образом:

$\varphi_G(x)=\varphi_{G\times H}(xh_i)=q$, $q\in G$, для любого $x\in X$. Очевидно, φ_G является полным отображением для графа G. Точно так же можно доказать существование полного отображения в графе H.

Теорема доказана.

Теорема 2 *Любая степень простого цикла нечетной длины не имеет полного отображения.*

Доказательство. Пусть G простой цикл нечетной длины $2\alpha(G)+1$, а n—некоторое натуральное число. Докажем, что G^n не имеет полного отображения. В графе G^n максимальные полные подграфы содержать не более 2^n вершин. Действительно, максимальные полные подграфы в C^n получаются умножением n—ребер $U_1, U_2,\ldots, U_n$ графа C (ребра могут совпадать). В работе ([4]) доказано, что если C—простой цикл нечетной длины, а H произвольный граф, то

$$\alpha(G\times H)\leqslant\alpha(H)\cdot\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right).$$

Из последнего неравенства следует

$$\alpha(G^k)\leqslant\alpha(G)\cdot\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^{k-1}$$

Для любого k. Значит, в графе G^n НВУМ содержит

$$\alpha(G^n)\leqslant\alpha(G)\cdot\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^{n-1}\qquad(2)$$

вершин. Из того, что максимальные подграфы в G^n содержат 2^n вершин, следует, что в одну вершину НВУМ можно сжать не более, чем 2^n вершин. Из равенства (2) и из последнего замечания следует, что число всех сжимаемых вершин в графе G^n не превосходит

$$\alpha(G)\cdot\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^{n-1}\cdot 2^n=2\alpha(G)\cdot(2\alpha(G)+1)^{n-1},$$

которое меньше, чем $(2\alpha(G)+1)^n$ число всех вершин графа G^n. Теорема доказана.

Обозначим через $G_1, G_2, \ldots, G_p$ все полные подграфы графа G. Предположим, каждой вершине $x\in G$, принимает такой вес $c(x)$, что

$$\sum_{x\in G_k} c(x)\leqslant 1, \text{ для любого } k=1,2,\ldots, p$$

и

$$\mu(G)=\max_{c(x)}\sum c(x)$$

В работе ([5]) доказано, что емкость графа

$$\theta(G)\leqslant\mu(G)$$

Теорема 3. *Для двух произвольных графов*

$$G=(X, U),\ H=(Y, V)$$

$$\mu(G\times H)\geqslant\mu(G)\cdot\mu(H)$$

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_p$ и $H_1, H_2, \ldots, H_q$ максимальные полные подграфы соответственно графов G и H, а

$$\mu(G)=\sum_{x\in G} c_G(x),\ \mu(H)=\sum_{y\in H} c_H(y).$$

Очевидно, максимальные полные подграфы графа $G\times H$ исчерпываются подграфами

$$G_i\times H_j,\ i=1,2,\ldots, p,\ j=1,2,\ldots, q.$$

Поэтому, если вершине $xy\in G\times H$ приписать вес

$$c_{G\times H}(xy)=c_G(x)\cdot c_H(y),$$

то $\sum\limits_{xy\in G_i\times H_j} c_{G\times H}(xy)=\sum\limits_{xy\in G_i\times H_j} c_G(x)\cdot c_H(y)=\sum\limits_{x\in G_i} c_G(x)\cdot\sum\limits_{y\in H_j} c_H(y)\leqslant 1$

Теорема 4. *Для $G=(X, U)$—простого цикла нечетной длины*

$$\mu(G^n)=\mu^n(G)=\left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^n,$$

Для любого $n=1,2,\ldots$.

Доказательство. Легко видеть, что любая вершина $x_{i_1}, x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ содержится в 2^n максимальных полных подграфах. Эти подграфы получаются произведением ребер $u_{i_1}, u_{i_2},\ldots, u_{i_n}$, смежных с вершиной $x_{i_1}, x_{i_2}\ldots x_{i_n}$. А так как в качестве u_{i_j}, $j=1,2,\ldots, n$, можно выбрать ровно два ребра, то получится 2^n подграфов. Очевидно, в графе G^n существует $(2\alpha(G)+1)^n$ максимальных полных подграфов.

Пусть $G_1^n, G_2^n, \ldots, G_p^n$—все полные подграфы графа G^n, $p=(2\alpha(G)+1)^n$, а $c_{G^n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n})$ весовая функция, удовлетворяющая условию:

$$\sum_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n} \in G_k^{(n)}} c_{G^n}(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_n}) \leqslant 1,$$

для любого $k=1, 2, \ldots, p$. Суммируя все неравенства по k и учитывая сделанные выше замечания, получаем:

$$2^n \sum_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n} \in G^n} c_{G^n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}) \leqslant (2\alpha(G)+1)^n.$$

Откуда следует

$$\mu(G^n) \leqslant \left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^n. \qquad (3)$$

Легко доказать, что

$$\mu(G) = \frac{2\alpha(G)+1}{2}.$$

Откуда, в силу теоремы 3

$$\mu(G^n) \geqslant \left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^n. \qquad (4)$$

Сравнивая (3) и (4) получим

$$\mu(G^n) = \mu^n(G) = \left(\frac{2\alpha(G)+1}{2}\right)^n.$$

Теорема доказана.

Остается открытым вопрос: всегда ли $\mu(G \times H) = \mu(G)\mu(H)$.

Теорема 5. *Простой граф имеет полное отображение.*

Доказательство. Пусть $G=(X, Y, U)$—простой граф и $S_G \subset X \cup Y$ некоторое НВУМ.

Обозначим через

$$S_G^X = S_G \cap X, \qquad S_G^Y = S_G \cap Y,$$

$$\overline{X} = X / S_G, \qquad \overline{Y} = Y / S_G.$$

Рассмотрим простой подграф

$$G_1 = (\overline{X}, S_G^Y, U_1)$$

графа G. В подграфе G_1 выполнены условия теоремы Кёнига—Холла [1];

$$|\Gamma A| \geqslant |A|, \quad \text{для любого } A \subset \overline{X}.$$

Действительно, в противном случае нашлось бы такое подмножество $A_0 \subset X$, для которого $|\Gamma A_0| < |A_0|$. Тогда множество

$$S_G^1 = (S_G / \Gamma A_0) \cup A_0$$

представляло бы собой ВУМ и $|S_G^{'}|>|S_G|$.

Последнее неравенство противоречит тому, что S_G является НВУМ.

Из теоремы Кёнига—Холла следует существование совершенного паросочетания $W_1 \subset U_1$, в графе G_1. Определим полное отображение σ_1 для графа G_1, следующим образом:

$$\sigma_1(x)=s, \quad \text{если ребро} \quad (x, s) \in W_1,$$

$$\sigma_1(s)=s; \quad \text{если} \quad s \in S_G^Y.$$

Точно таким же образом можно определить полное отображение σ_2 для подграфа $G_2=(Y, S_G^X, U_2)$.

Тогда полное отображение для графа G определим следующим образом:

$$\sigma(s)=s, \qquad \text{если} \quad s \in S_G,$$

$$\sigma(x)=\sigma_1(x) \quad \text{если} \quad x \in \overline{X},$$

$$\sigma(y)=\sigma_2(y), \quad \text{если} \quad y \in \overline{Y}.$$

Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт.

Ա. Գ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Գրաֆների սեղմող և պահպանող արտապատկերումների մասին

Հոդվածում ապացուցված է մի քանի թեորեմներ գրաֆում լրիվ պահպանող արտապատկերման գոյության վերաբերյալ։ Մասնավորապես ապացուցված է, որ կենտ երկարության ցիկլերի ոչ մի աստիճան չունի լրիվ արտապատկերում, իսկ պարզ գրաֆիկները ունեն։ Վերջին փաստը օգնում է պարզեցնելու ([1]) *աշխատանքի հիմնական թեորեմի ապացույցը։*

Հոդվածում ցույց է տրված նաև, որ կամայական G և H գրաֆների համար $\mu(G \times H) \geqslant \mu(G) \cdot \mu(H)$, իսկ երբ G հանդիսանում է կենտ երկարության ցիկլ $\mu(G^n)=\mu^n(G)$ կամայական n-ի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. Берж*, Теория графов и ее применения, ИЛ., М., 1962. [2] *К. Е. Шеннон*, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ., М., 1963. [3] *А. Г. Маркосян*, ДАН Арм. ССР, т. LII, № 1, (1971). [4] *А. Г. Маркосян*, «Известия АН Арм. ССР», серия «Математика», VI, № 5 (1971). [5] *M. Rosenfeld* Proc. Amer. Math. Soc. 26, No. 1, 1970.