УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

К. М. Мосесян

Базисные графы некоторых упорядочений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 31/V 1973)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в (1-2). Под словом „граф“ всюду будем понимать обыкновенный граф.

Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом (или, что то же, диаграммой) некоторого орграфа (графа частичного упорядочения, направленного множества, структуры), назовем базисуемым (сильно базисуемым, d -базисуемым, структурно базисуемым), а соответствующую ориентацию базисуемой (сильно базисуемой и т. д.).

Если в диаграмме некоторого упорядочения ликвидировать ориентацию, получим граф, называемый неориентированной диаграммой этого упорядочения.

В монографии (3) поставлены следующие задачи: описать классы базисуемых (гл. 8, п. 4, проблема 1*) и сильно базисуемых (гл. 9, п. 1) графов.

Описание структурно базисуемых графов связано со следующей давно поставленной проблемой Г. Биркгофа ((2), проблема 8): описать класс структур, которые однозначно восстанавливаются по своей неориентированной диаграмме.

В работе (4) Р. В. Петропавловская описала класс конечных плоских структурно базисуемых графов, а в работе (5) Л. Р. Альварес охарактеризовал классы графов, которые можно путем ориентации превратить в базисный граф для графов модулярных и дистрибутивных структур конечных длин. Сильно базисуемые графы исследуются в работах (6-10), а базисуемые графы — в работах (10-11).

Связный граф назовем критическим не сильно базисуемым, если он не является сильно базисуемым, но становится таковым после удаления любого ребра. Класс таких графов обозначим через $\bar{S}_c$.

В настоящей работе исследуются d -базисуемые графы и про-

должается исследование сильно базлируемых графов. Доказано, что для связных графов подклассы d -базлируемых и сильно базлируемых графов совпадают и что для любой вершины a произвольного d -базлируемого графа $L = (X, U)$ существует такой изоморфизм между графом $L = (X, U)$ и диаграммой Хассе ⁽²⁾ некоторого направленного множества, при котором вершина a соответствует нулю этой диаграммы. Кроме того, конструктивно доказана теорема о существовании критических не сильно базлируемых графов, опубликованная ранее без доказательства (см. ^(b), теорема 3), и получена нижняя оценка количества сильно базлирующих ориентаций для любого сильно базлируемого графа.

Приведем некоторые определения.

Пусть $L = (X, U)$ — ориентированный или неориентированный граф и $a, b \in X$; $A, B \subseteq X$. Через $d(a, b)$ обозначим длину кратчайшей неориентированной цепи между вершинами a и b . Расстояние между подмножествами A и B определяются так:

$d(A, B) = \min_{x \in A, y \in B} d(x, y)$. В случае, когда граф ориентированный, че-

рез $\vec{d}(a, b)$ обозначим длину кратчайшего ориентированного пути, с началом в a и с концом в b . Если графу $L = (X, U)$ придана ориентация φ , то полученный орграф можно обозначить так: $\vec{L} = (X, \vec{U}) = L(\varphi) = L(X, U(\varphi))$.

Через $\overleftarrow{\varphi}$ обозначим обратную ориентацию для ориентации φ . Если орграф $L(\varphi)$ ациклический, то через $|\varphi|$ обозначим длину наибольшего ориентированного пути орграфа $L(\varphi)$.

Пусть $\rho(x)$ обозначает количество ребер, инцидентных вершине x , $\varepsilon(L) = \max_{x \in X} \rho(x)$ — степень графа $L = (X, U)$, $\gamma(L)$ — его хроматическое число. Через $\rho^+(x)$ и $\rho^-(x)$ обозначаем количества дуг орграфа $\vec{L} = (X, \vec{U})$, исходящих из вершины x , соответственно заходящих в x .

Пусть B — класс базлируемых, S — сильно базлируемых, $D-d$ — базлируемых, $\overline{S}_c^n$ — n — вершинных критических не сильно базлируемых, C — связных графов, Λ_k — класс графов с обхватом не менее k (обхват дерева считается равным бесконечности), а F_3 — трехвершинный полный граф.

Через $\vec{S}$ ($\vec{D}$) обозначим класс сильно базлируемо (d -базлируемо) ориентированных орграфов, через $\vec{S}(L)$ ($\vec{D}(L)$) — множество сильно базлирующих (d -базлирующих) ориентации графа L .

Пусть далее, $k \geq 0$, $L = (X, U)$, $\vec{L} = (X, \vec{U})$, $A \subseteq X$. Положим

$$\Gamma^k | A; L | = | \{ y \in X / \exists z \in A (d(z, y) = k) \} |,$$

$$\Gamma^{+k} | A; \vec{L} | = | \{ y \in X / \exists z \in A (\vec{d}(z, y) = k) \} |,$$

$$\Gamma^{-k} | A; \vec{L} | = | \{ y \in X / \exists z \in A (\vec{d}(y, z) = k) \} |.$$

При $k \geq 2$ положим

$$\bar{L}^+ = \bar{L}^{+1} = \{x \in X / \rho^-(x) = 0\},$$

$$\bar{L}^{+k} = \bar{L}^{+k}(\varphi) = \{x \in L^+(\varphi) / \forall i (1 \leq i \leq k-1) (\Gamma^{-1}[\Gamma^{+i}[x]] \subseteq \bigcup_{j=0}^{i-1} \Gamma^{+j}[x])\}.$$

При $k \geq 1$, $L = (X, U)$ и $A \subseteq X$ полагаем

$$\bar{S}_A^{+k}(L) = \{\varphi \in \bar{S}(L) / A \subseteq L^{+k}(\varphi)\},$$

$$\bar{S}_{A(bc)}^{+k}(L) = \{\varphi \in \bar{S}_A^{+k}(L) / bc \in U(\varphi)\}.$$

Пусть $L(\varphi) = (X, U(\varphi))$, $A \subseteq X$ и $0 \leq m \leq n$; здесь и в дальнейшем будем обозначать через $[m, n]$ множество неотрицательных целых чисел, не меньших m и не больших n . Ориентация $\bar{\varphi}(A; [m, n])$ определяется следующим соотношением:

$$\forall a, b \in X ((d(A; \{a, b\}) \in [m, n]) \rightarrow (\bar{a}b \in U(\bar{\varphi}(A; [m, n])) \leftrightarrow \bar{b}a \in U(\varphi))) \& \\ \& ((d(A; \{a, b\}) \notin [m, n]) \rightarrow (\bar{a}b \in U(\bar{\varphi}(A; [m, n])) \leftrightarrow \bar{a}\bar{b} \in U(\varphi))).$$

Л е м м а 1. $L = (X, U) \in D \leftrightarrow \exists \varphi \in \bar{S}(L) (|L^+(\varphi)| = 1)$.

Л е м м а 2. $\forall L(\varphi) \in \bar{S} \forall k \geq 0 \forall Y \subseteq L^{+(k+1)}(\varphi) (\bar{\varphi}(Y; [0, k]) \in \bar{S}(L))$.

Лемма 1 очевидна. Лемма 2 доказывается методом математической индукции.

З а м е ч а н и е. $\forall L = (X, U) (\varphi \in \bar{S}(L) \leftrightarrow \bar{\varphi} \in \bar{S}(L))$.

С л е д с т в и е. $\forall L(\varphi) \in \bar{S} \forall k \geq 1 \forall i \in [0, k] \forall Y \subseteq L^{+k}(\varphi) (\bar{\varphi}(Y; [i, \infty]) \in \bar{S}(L))$.

Можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 3. $\forall \bar{L} = (X, U(\varphi)) \in \bar{S} \forall a \in (L^+(\varphi) / L^{+2}(\varphi)) \exists \psi \in \bar{S}(L) (L^+(\psi) = L^+(\varphi) / \{a\})$.

С л е д с т в и е. $\forall \bar{L} = (X, U(\varphi)) \in \bar{S} (|L^+(\varphi)| = \min_{\psi \in \bar{S}(L)} |L^+(\psi)|) \rightarrow (L^+(\varphi) = L^{+2}(\varphi))$.

При помощи леммы 3 доказывается

Л е м м а 4. $\forall \bar{L} = (X, U(\varphi)) \in \bar{S} \forall a \in L^{+2}(\varphi) \forall Y (Y \subseteq \Gamma^{-1}[a; L(\varphi)] \& Y \neq \emptyset) \exists \varphi_y \in \bar{S}(L) (L^+(\varphi_y) = (L^+(\varphi) / \{a\}) \cup Y)$.

Т е о р е м а 1. $L = (X, U) \in S \cap C \leftrightarrow \forall a \in X \exists \varphi \in \bar{S}(L) (L^+(\varphi) = \{a\})$.

Достаточность теоремы очевидна.

Необходимость. Сначала докажем, что

$$\forall L = (X, U) \in S \cap C \exists \varphi \in \bar{S}(L) (|L^+(\varphi)| = 1) \quad (*).$$

Допустим

$$\exists H = (Y, V) \in S \cap C \quad \forall \varphi \in \vec{S}(H) \quad (|H^+(\varphi)| > 1).$$

Пусть $\Phi = \{ \varphi \in \vec{S}(H) / |H^+(\varphi)| = \min_{\gamma \in \vec{S}(H)} |H^+(\gamma)| \}$, $\varphi_1 \in \Phi$, $a_1, b_1 \in H^+(\varphi_1)$

$$\text{и } d(a_1, b_1) = \min_{\gamma \in \Phi} \min_{x, y \in H^+(\gamma)} d(x, y).$$

По следствию леммы 3, $H^+(\varphi_1) = H^{+2}(\varphi_1)$.

Пусть $C_k = (a_1 = c_0, c_1, \dots, c_k = b_1)$ — одна из кратчайших цепей графа $H = (Y, V)$, соединяющая вершины a_1 и b_1 . По лемме 4.

$$\exists \varphi_2 \in \vec{S}(H) \quad (H^+(\varphi_2) = (H^+(\varphi_1) / \{a_1\}) \cup \{c_1\}),$$

что невозможно, так как $\varphi_2 \in \Phi$ и $d(c_1, b_1) < d(a_1, b_1)$.

Утверждение (*) доказано.

Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда

$$\exists cd \in U((\exists \varphi_3 \in \vec{S}(L) (|c| = L^+(\varphi_3)) \& (\neg \exists \varphi_4 \in \vec{S}(L) (|d| = L^+(\varphi_4))))).$$

Пользуясь леммой 4, построим ориентацию $\varphi_5 \in \vec{S}(L)$, при которой $L^+(\varphi_5) = (L^+(\varphi_3) / \{c\}) \cup \{d\}$.

Ясно, что $L^+(\varphi_5) = \{d\}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

С л е д с т в и е. Частично упорядоченное множество однозначно восстанавливается по своей неориентированной диаграмме тогда и только тогда, когда всякое его кардинально неразложимое подмножество состоит из не более двух элементов.

Это следствие для частично упорядоченных множеств решает задачу, аналогичную задаче Г. Биркгофа, поставленной для структур.

Из доказанной теоремы и из соотношения $S = B \cap \Lambda_1$, установленного в (10), непосредственно следует

$$\text{Т е о р е м а 2. а) } D = S \cap C = B \cap C \cap \Lambda_1,$$

$$\text{б) } \forall L = (X, U) \in D \quad \forall a \in X \quad \exists \varphi \in \vec{D}(L) \quad (L^+(\varphi) = \{a\}).$$

Л е м м а 5. $\forall L = (X, U) \in S \quad \forall a \in X \quad \forall bc \in U \quad (d(\{a\}, \{b, c\}) > 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \vec{S}_{a(bc)}^{+2}(L) \neq \emptyset.$$

Действительно, по теореме 1, $\exists \varphi \in \vec{S}_a^{+2}(L)$. В случае, если $cb \in U(\varphi)$,

возьмем ориентацию $\varphi(a; [0, 1])$, которая, по замечанию и по лемме 2, входит в $\vec{S}_{a(bc)}^{+2}(L)$.

Для любых целых $k \geq 2$ и $p \geq 11$ определим $(4k+3)$ -вершинный граф M_{4k+3} и p -вершинный граф $\bar{M}_p$ следующим образом:

$$M_{4k+3} = (\{c_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{2k+1} \{a_i, b_i\}; \{a_1 a_{2k+1}\} \cup \{a_1 b_{2k+1}\} \cup \{c_0 b_{2k+1}\} \cup$$

$$\cup \{b_1 a_{2k+1}\} \cup \bigcup_{i=1}^{2k} (\{a_i a_{i+1}\} \cup \{a_i b_{i+1}\} \cup \{c_0 b_i\} \cup \{b_i a_{i+1}\})).$$

При нечетном p граф $\tilde{M}_p$ получается из M_{2p-1} склеиванием некоторых подмножеств вершин, индексы которых имеют одинаковые четности, а именно: $(b_2, \dots, b_{p-9})$, $(b_3, \dots, b_{p-8})$, и удалением параллельных ребер. При четном p граф $\tilde{M}_p$ получается из $\tilde{M}_{p+1}$ склеиванием вершин (b_1, b_{2k+1}) и удалением параллельных ребер.

Л е м м а 6. а) $\forall k \geq 2 (M_{4k+3} \in \overline{S_c^{-4k+3}})$,

б) $\forall p \geq 11 (\tilde{M}_p \in \overline{S_c^p})$.

Допустим, что $k_0 \geq 2$ и $M_{4k_0+3} \in S$. Однако, нетрудно заметить, что $\overline{S_{c_0}^{+2}}(M_{4k_0+3}) = \emptyset$, в противоречии с теоремой 1. Следовательно, $\forall k \geq 2 (M_{4k+3} \in \overline{S})$. При удалении произвольного ребра из любого графа M_{4k+3} с $k \geq 2$ получается 3-хроматический граф обхвата 4, который, как доказано в работе (9), сильно базируем.

Утверждение б/ доказывается аналогично.

Отметим, что гипотеза о справедливости пункта а) доказанной леммы, независимо от автора, высказывалась в частном сообщении Л. С. Мельниковым.

Т е о р е м а 3. 1) $\overline{S_c^1} = \overline{S_c^2} = \overline{S_c^4} = \dots = \overline{S_c^{10}} = \emptyset$,

2) $\overline{S_c^3} = \{F_3\}$, 3) $\forall p \geq 11 (\overline{S_c^p} \neq \emptyset)$.

Утверждения 1) и 2) доказываются с помощью теоремы 4 из (7), а 3) следует из пункта б) предыдущей леммы.

Можно показать, что имеют место следующие утверждения.

Л е м м а 7. $\forall L = (X, U) \in S \cap C \forall a, b \in X (ab \in U \rightarrow \exists \varphi \in \overline{S}(L) (L^+(\varphi) = \{a, b\}))$.

Л е м м а 8. $\forall L = (X, U) \in S \cap C \forall a \in X \forall Y (Y \subseteq \Gamma[a; L] \& \& Y \neq \emptyset) \exists \varphi_y \in \overline{S}(L) (L^+(\varphi) = Y)$.

Т е о р е м а 4. $\forall L = (X, U) \in S \cap C (|\overline{S}(L)| \geq \frac{|X|(|X|+1) - 2|U|}{2} +$

$+\sum_{i=3}^{\sigma(L)} |P_i|$, где $P_i = \{ |x_1, \dots, x_i| / \exists x \in X (|x_1, \dots, x_i| \subseteq \Gamma[x; L]) \}$.

Действительно, ориентации, получающиеся в теореме 1, в лемме 7 и в лемме 8 (для $|Y| \geq 3$), попарно различны. Следовательно, $|\overline{S}(L)|$ не меньше суммы количеств этих ориентаций.

З а м е ч а н и е. Полученная оценка дает точное количество сильно базирующих ориентаций для следующих графов:

$$L_n = (\{a\} \cup \{b\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{c_i\}; \bigcup_{i=1}^n (\{ac_i\} \cup \{bc_i\})), n \geq 1.$$

Пользуясь предыдущими результатами, нетрудно доказать справедливость следующих предложений.

Предложение 1. $\forall L = (X, U) [L \in S \leftrightarrow \exists ab \in U ((L_1 = L(X, U / \{ab\}) \in S) \& (\exists \varphi \in \bar{S}(L_1) (a \in L_1^{+2}(\varphi) \& b \in L_1(\varphi)))]$.

Предложение 2. $\forall L = (X, U) [L \in S \leftrightarrow \exists a \in X \varphi \in \bar{S}(L(X / \{a\})) (\Gamma |a; L(X, U)| = L^+(\varphi))]$.

З а м е ч а н и е. Предложения 1 и 2 остаются справедливыми, если в них вместо $\exists ab$ и $\exists a$ напишем соответственно $\forall ab$ и $\forall a$.

В заключение сформулируем несколько гипотез:

Г и п о т е з а 1. $\exists k \geq 5 (\Lambda_k / S = \emptyset)$.

Г и п о т е з а 2. $L \in S \rightarrow \exists \varphi \in \bar{S}(L) (|\varphi| = \gamma(L) - 1)$.

Г и п о т е з а 3. $\forall k \geq 6 (L \in S \cup \Lambda_k \rightarrow \exists a \in X (\bar{S}_a^{[k]}(L) \neq \emptyset))$.

Г и п о т е з а 4. $L = (X, U) \in S_c / \{F_3\} \rightarrow |U_i| \geq 2|X| - 2$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского Государственного университета

Վ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Որոշ կարգավորումների բազիսային գրաֆներ

Մասնակի կարգավորված բազմությունը կոչվում է ուղղորդված, եթե նրա էլեմենտների ցանկացած զույգի համար գոյություն ունի ստորին եզր:

Ոչ կողմնորոշված գրաֆը կոչվում է ուժեղ բազիսացվող (ձ-բազիսացվող), եթե այն կարելի է կողմնորոշման միջոցով դարձնել որևէ մասնակի կարգավորված (ուղղորդված) բազմության բազիսային գրաֆ: Գրաֆը կոչվում է կրիտիկական ոչ ուժեղ բազիսացվող, եթե այն ուժեղ բազիսացվող չէ, բայց դառնում է այդպիսին, ցանկացած կող հեռացնելուց հետո:

Աշխատանքում հետազոտվում են ուժեղ բազիսացվող և ձ-բազիսացվող գրաֆների դասերը: Ապացուցվում է, որ գրաֆի ձ-բազիսացման համար անհրաժեշտ է ու բավարար, որ այն լինի կապակցված և ուժեղ բազիսացվող: Ապացուցվում է թեորեմ կրիտիկական ոչ ուժեղ բազիսացվող գրաֆների գոյության մասին: Բացի դրանից, գրաֆի ուժեղ բազիսային կողմնորոշումների քանակի համար ստացված է ներքին գնահատական, որը ընդհանուր դեպքում, չի կարելի ուժեղացնել: Տրված է Բիրկհոֆի ստրուկտուրաների մասին դրված հարցի (⁽²⁾ պրոբլեմ 8) պատասխանը մասնակի կարգավորված բազմությունների համար:

Վերջում առաջադրված են մի քանի հիպոթեզներ կրիտիկական ոչ ուժեղ բազիսացվող գրաֆների կողերի քանակի, որոշ հատկությամբ օժտված ուժեղ բազիսացվող գրաֆների և ուժեղ բազիսային կողմնորոշումների գոյության մասին:

ЛИТЕРАТУРА — ЧРЦЦЦЦЦЦЦЦЦЦ

- ¹ А. А. Зыков. Теория конечных графов, I, Изд. „Наука“, Новосибирск, 1969.
² Г. Биркгоф, Теория структур. ИЛ, 1952. ³ О. Ore., Теория графов, Изд. „Наука“, М., 1968. ⁴ Р. В. Петропавловская, ДАН СССР, 74(1950). ⁵ L. R. Alvarez, Canad. J. Math., №6, 923—932, 17(1965). ⁶ С. Е. Huff, U. S. R. Murty, R. C. Wilton, Canad. Math. Bull., №3, 371—374, 13(1970). ⁷ К. М. Мосесян, ДАН Арм. ССР, т. LIV, №1 (1972). ⁸ К. М. Мосесян, ДАН Арм. ССР, т. LIV, №3 (1972). ⁹ К. М. Мосесян, ДАН Арм. ССР, т. LIV, №5 (1972). ¹⁰ К. М. Мосесян, ДАН Арм. ССР, т. LV, №2 (1973). ¹¹ К. М. Мосесян, ДАН Арм. ССР, т. LVI, №5 (1973).