ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 5

УДК 517.926

МАТЕМАТИКА

К. Г. Валеев, И. Р. Карганян

Обобщение теоремы Вейерштрасса

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/V 1973)

В теории неявных функций большую роль играет теорема Вейерштрасса о разложении функций на множители ([1–3]). Ее можно использовать при исследовании устойчивости движения ([4–6]). Здесь указываются некоторые обобщения теоремы Вейерштрасса, использующие разложение матриц на множители.

1. Прежде чем излагать доказательство основных результатов, докажем вспомогательное утверждение о матрицах голоморфных в круге.

Лемма. *Если $\Psi(p)$—матрица голоморфная в круге $|p| \leq r$ и представлена в виде разложения:*

$$\Psi(p) = C_0 + pC_1 + \ldots + p^{n-1} C_{n-1} + p^n \Gamma_n(p), \tag{1.1}$$

где C_k $(k=0,1, \ldots, (n-1))$ —постоянные матрицы, $\Gamma_n(p)$ —голоморфная матрица, то имеют место оценки:

$$\|C_k\| \leq \frac{1}{r^k} \sup_{|p| \leq r} \|\Psi(p)\|, \quad \|\Gamma_n(p)\| \leq \frac{n+1}{r^n} \sup_{|p| \leq r} \|\Psi(p)\|. \tag{1.2}$$

Доказательство. Оценки для норм матриц C_k следуют из формулы Коши

$$C_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} \Psi(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi \qquad (k=0,1, \ldots, n-1. \tag{1.3}$$

Так как для произвольной матрицы $H(p)$ с голоморфными при $|p| \leq r$ элементами имеет место неравенство:

$$\|H(p)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|H(p+\varepsilon e^{i\varphi})\| d\varphi, \quad |p+\varepsilon e^{i\varphi}| < r, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

то максимум нормы матрицы $H(p)$ достигается на границе $|p| = r$. Следовательно, из (1.1) получим оценку:

$$\|\Gamma_n(p)\| \leqslant \sup_{|p|<r} \left\| p^{-n}\Psi(p) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k p^{k-n} \right\| \leqslant \frac{n+1}{r^n} \sup_{|p|<r} \|\Psi(p)\|,$$

которая доказывает лемму.

Замечание 1. Матрицы Ψ, C_k, Γ могут зависеть также от других комплексных или вещественных параметров.

Введем линейные операторы F_k, G, которые сопоставляют матрице $\Psi(p)$ соответственно матрицы G_k, $\Gamma(p)$:

$$F_k\{\Psi(p)\} = G_k, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \quad G\{\Psi(p)\} = \Gamma(p). \tag{1.4}$$

Из оценок (1.2) получим для норм операторов F_k, G соотношения

$$\|F_k\| \leqslant r^{-k}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad \|G\| \leqslant (n+1)r^{-n}. \tag{1.5}$$

2. Используя предыдущие выводы, докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть элементы матриц $L(p,\mu)$, $\Psi(p,\mu)$ являются голоморфными функциями от p и непрерывными функциями от вещественной переменной μ в замкнутой области D:*

$$|p| \leqslant r, \qquad |\mu| \leqslant \mu_0. \tag{2.1}$$

Предполагается, что в D выполняются неравенства:

$$l = \sup_{p,\mu\in D} \|L(p,\mu)\| \leqslant r^n(n+1)^{-1}, \qquad \|\Psi(p,\mu)\| \leqslant M = \text{const}. \tag{2.2}$$

Если выполнены условия:

$$|p| \leqslant r, \qquad |\mu| < \min\left\{ \frac{r^n}{4n(n+1)M}\left(1 - \frac{n+1}{r^n} l\right)^2, \quad \mu_0 \right\}, \tag{2.3}$$

то уравнение вида

$$\mathrm{Det}[Ep^n + L(p,\mu) + \mu\Psi(p,\mu)] = 0, \tag{2.4}$$

где E—единичная матрица, может быть приведено к следующему виду

$$\mathrm{Det}[Ep^n + L(p,\mu) + \mu \sum_{k=0}^{n-1} B_k(\mu)p^k] = 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Докажем сначала, что при выполнении условий (2.3) справедливо следующее разложение на матричные множители

$$Ep^n + L + \mu\Psi = (Ep^n + L + \mu \sum_{k=0}^{n-1} B_k p^k)\ (E + \mu\Gamma(p,\mu)). \tag{2.6}$$

Раскрывая скобки и сокращая на μ, получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k p^k + p^n\Gamma = \Psi - L\Gamma - \mu \sum_{k=0}^{n-1} B_k p^k \Gamma. \tag{2.7}$$

Для отыскания матриц B_k, Γ используем метод последовательных приближений, используя введенные в (1.4) операторы F_k, G,

$$B_k^{(s+1)} = F_k\{\Psi - L\Gamma^{(s)} - \mu \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{(s)} p^k \Gamma^{(s)}\} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$\Gamma^{(s+1)} = G[\Psi - L\Gamma^{(s)} - \mu \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{(s)} p^k \Gamma^{(s)}] \quad (s=0,1,2,\ldots). \tag{2.8}$$

За начальные значения последовательностей $B_k^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$ примем нулевые значения:

$$B_k^{(0)} = 0 \qquad (k=0,1,\ldots, n-1), \ \Gamma^{(0)} = 0.$$

Найдем условие ограниченности последовательностей $B_k^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$. Если предположим выполнение неравенств:

$$\|B_k^{(s)}\| \leqslant ar^{-k} M, \ (k=0,1,\ldots, n-1), \ \|\Gamma^{(s)}\| \leqslant a(n+1)r^{-n}M \tag{2.9}$$

при некотором s, то из соотношений (1.5) следует, что неравенства (2.9) выполняются для всех s, если имеет место неравенство:

$$1 + (l + |\mu| anM) \, a(n+1)r^{-n} \leqslant a. \tag{2.10}$$

Для исследования сходимости последовательностей $B_k^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$ оценим разности последовательных значений. Получим выражения:

$$B^{(s+1)} - B_k^{(s)} = F_k\{N^{(s)}\}, \ \Gamma^{(s+1)} - \Gamma^{(s)} = G_n\{N^{(s)}\}, \ (s=0,1,2,\ldots), \tag{2.11}$$

$$N^{(s)} \equiv L(\Gamma^{(s-1)} - \Gamma^{(s)}) + \mu \sum_{k=0}^{n-1} [(B_k^{(s-1)} - B_k^{(s)})\Gamma^{(s-1)} + B_k^{(s)}(\Gamma^{(s-1)} - \Gamma^{(s)})]p^k.$$

Используя оценки (1.5), получаем неравенства:

$$\|B_k^{(s+1)} - B_k^{(s)}\| \leqslant r^{-k} f^{(s)} \ (k=0,1,\ldots n-1), \ \|\Gamma^{(s+1)} - \Gamma^{(s)}\| \leqslant (n+1)r^{-n} f^{(s)}, \tag{2.12}$$

где введено обозначение:

$$f^{(s)} = \|\Gamma^{(s)} - \Gamma^{(s-1)}\| (l + |\mu| anM) + |\mu| a(n+1)M \sum_{k=0}^{n-1} \|B_k^{(s)} - B_k^{(s-1)}\| r^{k-n}.$$

Из (2,12) находим неравенство:

$$f^{(s+1)} \leqslant r^{-n}(n+1) \ (l + 2|\mu| anM) f^{(s)} \ (s=1,2,\ldots). \tag{2.13}$$

Последовательности $B_k^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$ сходятся равномерно, если

$$(n+1) \ (l + 2|\mu| anM) < r^n. \tag{2.14}$$

Если выполнены условия (2,2), то неравенства (2,10), (2,14) имеют решения:

$$a = \frac{2}{1-(n+1)r^{-n}l}, \quad |\mu| < \frac{r^n}{4n(n+1)M}\left(1 - \frac{n+1}{r^n} l\right)^2. \tag{2.15}$$

Следовательно, при выполнении условий (2,3) существуют пределы:

$$B^k = \lim_{s\to\infty} B_k^{(s)} \ (k=0,1,\ldots, n-1), \ \Gamma = \lim_{s\to\infty} \Gamma^{(s)},$$

т. е, справедливо разложение (2,6). Для окончательного доказательства теоремы оценим норму матрицы Г. Из (2.9) получим:

$$|\mu|\,\|\Gamma^{(s)}\| \leqslant \frac{1}{2n}\left(1-\frac{n+1}{r^n}l\right) < 1,$$

поэтому уравнение

$$\mathrm{Det}\ [E+\mu\Gamma(p,\mu)]=0,$$

не имеет корней в круге $|p|\leqslant r$. Теорема доказана.

Замечание 2. В частном случае при $n=1$, $L(p,\mu)\equiv 0$ получим уравнение:

$$\mathrm{Det}[Ep+\mu\Psi(p,\mu]=0,$$

которое при выполнении условий:

$$|p|\leqslant r, \qquad |\mu| < \min\left\{\frac{r}{8M},\ \mu_0\right\} \tag{2.16}$$

может быть приведено к уравнению вида:

$$\mathrm{Det}[Ep+\mu B(\mu)]=0.$$

Условия (2.16) оказываются менее жесткими, чем условия, указанные в ([5]).

Замечание 3. Решение уравнения

$$\mathrm{Det}[Ep^n+p^{n+1}L(p,\mu)+\mu\Psi(p,\mu)]=0$$

может быть сведено к решению уравнения вида (2.5). Для этого используем преобразование:

$$Ep^n+p^{n+1}L(p,\mu)+\mu\Psi(p,\mu)=[E+pL(p,\mu)]\ [Ep^n+\mu\Psi_1(p,\mu)],$$

$$\Psi_1(p,\mu)=(E+pL(p,\mu))^{-1}\ \Psi(p,\mu).$$

Для нормы матрицы $\Psi_1(p,\mu)$ получим в D оценку

$$\|\Psi_1(p,\mu)\| \leqslant (1-r\sup_{p,\mu\in D}\|L(p,\mu)\|)^{-1}\ \|\Psi(p,\mu)\|.$$

3. Иногда о расположении корней алгебраического уравнения можно судить по формуле уравнения. Если H—эрмитова матрица, то все корни уравнения:

$$\mathrm{Det}\ [Ep-H]=0 \tag{3.1}$$

являются вещественными числами, а сама матрица имеет полную ортонормированную систему векторов (([7]) стр. 223). Этот результат можно обобщить для более сложного уравнения.

Теорема 2. *Пусть элементы матрицы $\Psi(p,\mu)$ являются голоморфными функциями от p и непрерывными функциями от вещественной переменной μ в замкнутой области D* (2.1).

Предполагаем, что в D выполнено условие:

$$\|\Psi(p,\mu)\| \leqslant M. \tag{3.2}$$

Пусть матрица $\Psi(p,\mu)$—эрмитова при вещественных значениях p

Если выполнены условия

$$|p| \leqslant r, \quad |\mu| \leqslant \mu_1 = \min\left\{\frac{r}{13M}, \ \mu_0\right\}, \tag{3.3}$$

то уравнение вида:

$$\mathrm{Det}\ [Ep - \mu\Psi(p,\mu)] = 0 \tag{3.4}$$

может быть приведено к виду

$$\mathrm{Det}\ [Ep - \mu H(\mu)] = 0, \tag{3.5}$$

где $H(\mu)$*—эрмитова матрица, при* $|\mu| \leqslant \mu_1$, *ограниченная по норме:*

$$\|H(\mu)\| \leqslant 2M. \tag{3.6}$$

Другими словами, при $|\mu| \leqslant \mu_1$ все корни уравнения (3.4), лежащие в круге $|p| \leqslant r$, являются вещественными.

Доказательство этой теоремы вытекает из следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. *Пусть элементы матрицы* $\Psi(p,\mu)$ *являются голоморфными функциями от* p *и непрерывными функциями от вещественной переменной* μ *в замкнутой области* D;

$$|p| \leqslant r, \qquad |\mu| \leqslant \mu_0, \tag{3.7}$$

ограничены в D:

$$\|\Psi(p,\mu)\| \leqslant M. \tag{3.8}$$

Пусть матрица $\Psi(p,\mu)$ *эрмитова при вещественных значениях* p, *а* I*—диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы равные* 1 *или* -1. *Если выполнены условия:*

$$|p| \leqslant r, \quad |\mu| < \mu_1 = \min\left\{\frac{r}{M}\,\frac{16\sqrt{3}-27}{9}, \ \mu_0\right\}, \tag{3.9}$$

то справедливо равенство:

$$Ip - \mu\Psi(p,\mu) = (I - \mu\Gamma(p,\mu))\ (Ip - \mu H(\mu))\ (I - \mu\Gamma(p,\mu)), \tag{3.10}$$

где матрица $H(\mu)$*—эрмитова при* $|\mu| < \mu_1$. *В области* (3.9) *выполняются неравенства:*

$$\|H(\mu)\| \leqslant aM, \ \|\Gamma(p,\mu)\| \leqslant ar^{-1}M, \ \left(a = \frac{3}{5-2\sqrt{3}} < 2.\right). \tag{3.11}$$

Следовательно, уравнение вида:

$$\mathrm{Det}\ [Ip - \mu\Psi(p,\mu)] = 0 \tag{3.12}$$

может быть представлено в области (3.9) *в следующем виде:*

$$\mathrm{Det}\ [Ip - \mu H(\mu)] = 0. \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с в о. Отметим простые свойства матрицы I:

$$\|I\| = 1, \ II = E, \ I^{-1} = I, \ I^* = I. \tag{3.14}$$

Звездочкой здесь и далее будем обозначать переход к транспонированной, комплексно-сопряженной матрице. Тождество (3.10) будет доказано, если найдутся голоморфные эрмитовы матрицы H, Γ, удовлетворяющие уравнению:

$$\Psi = IHI + 2p\Gamma - \mu(\Gamma HI + IH\Gamma - p\Gamma I\Gamma) + \mu^2\Gamma H\Gamma. \tag{3.15}$$

Ищем матрицы $H(\mu)$, $\Gamma(p,\mu)$ с помощью метода последовательных приближений, полагая

$$IH_{s+1}I + 2p\Gamma_{s+1} = R_s,\ R_s \equiv \Psi + \mu(\Gamma_s H_s I + IH_s\Gamma_s + p\Gamma_s I\Gamma_s) - \mu^2\Gamma_s H_s\Gamma_s. \tag{3.16}$$

Используя операторы F_0, C_1 (1.4), получаем:

$$IH_{s+1}I = F_0|R_s|,\ \Gamma_{s+1} = \frac{1}{2}G_1|R_s| \quad s = 0,1,2,\ldots). \tag{3.17}$$

Из (3.16), (3.17) следует, что если H_s, Γ_s —эрмитовы при вещественных значениях p, т. е.

$$H_s = H_s^*,\quad \Gamma_s = \Gamma_s^*,$$

то и H_{s+1}, Γ_{s+1} тоже будут эрмитовы. Разложение на три множителя потребовалось, так как произведение двух эрмитовых матриц может быть неэрмитовой матрицей.

Предполагая выполнение условий:

$$\| H_s \| \leqslant aM,\quad \| \Gamma_s \| \leqslant ar^{-1}M,\quad H_0 = 0,\quad \Gamma_0 = 0 \tag{3.18}$$

находим с помощью формул (1.5), что оценки (3.18) для норм матриц H_s, Γ_s будут выполнены при всех $s = 1, 2, \ldots,$ если выполнено неравенство:

$$3x + x^2 < 1 - a^{-1} \qquad (a > 1,\quad x = |\mu| ar^{-1}M). \tag{3.19}$$

Предполагая это условие выполненным, исследуем сходимость последовательностей H_s, Γ_s, оценивая разности последовательных значений:

$$\| H_{s+1} - H_s \| \leqslant (2x + x^2) \| H_s - H_{s-1} \| + r(4x + 2x^2) \| \Gamma_s - \Gamma_{s-1} \| .$$

$$\| \Gamma_{s+1} - \Gamma_s \| \leqslant r^{-1}(2x + x^2) \| H_s - H_{s-1} \| + (4x + 2x^2) \| \Gamma_s - \Gamma_{s-1} \| .$$

Из (3.20) следует, что если выполнено неравенство:

$$6x + 3x^2 < 1, \tag{3.11}$$

то последовательности H_s, Γ_s сходятся равномерно и существуют пределы:

$$H(\mu) = \lim_{s\to\infty} H_s,\qquad \Gamma(p,\mu) = \lim_{s\to\infty} \Gamma_s.$$

Неравенства (3.19), (3.21) имеют решение:

$$a = \frac{3}{5 - 2\sqrt{3}} < 2,\quad |\mu| < \frac{r}{M}\,\frac{16\sqrt{3} - 27}{9} < \frac{r}{13M}.$$

Чтобы доказать эквивалентность уравнений (3.4), (3.5) оценим норму матрицы $\Gamma(p,\mu)$. Из (3.18) получим:

$$|\mu|\,\|\Gamma\| \leqslant x < \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = 0{,}155\ldots < 1$$

это неравенство окончательно доказывает теорему.

Замечание 4. Результаты статьи легко обобщить, предполагая, что элементы матрицы $\Psi(p,\mu)$ голоморфно зависят от параметра μ (или от нескольких параметров). Вместо матриц $E, L(p,\mu)$, $\Psi(p,\mu)$ можно взять операторы, изменяя соответственно формулировки теорем при отыскании спектров резольвент.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Կ. Գ. ՎԱԼԵԵՎ, Ի. Ռ. ԿԱՐԴԱՆՅԱՆ

Վեյերշտրասի թեորեմի ընդհանրացումը

Ընդհանրացվում է հոլոմորֆ էլեմենտներ ունեցող մատրիցն արտադրիչների վերլուծելու մասին Վեյերշտրասի թեորեմը։ Նշվում են վերլուծության հնարավորության բավարար պայմանները։ Մատրիցային արտադրիչների վերլուծման օգնությամբ $\Psi(p,\mu)$ մատրիցի p իրական փոփոխականի նկատմամբ էրմիտյան լինելու դեպքում ստացվում են

$$\mathrm{Det}\,[Ip-\mu\Psi(p,\mu)]=0$$

հավասարումից

$$\mathrm{Det}[Ip-\mu H(\mu)]=0$$

հավասարման անցման նպաստող պայմանները։

Այստեղ $H(\mu)$—էրմիտյան մատրից է, իսկ I—անկյունագծային, որի գլխավոր անկյունագծի վրա 1 և —1 թվերն են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Н. Еругин*, Неявные функции. Изд. Ленингр. ун-та, 1956. [2] *Э. Гурса*, Курс математического анализа, т. II, ч. I, ГТТИ, М.—Л., 1933. [3] *А. И. Маркушевич*, Теория аналитических функций, т. I, Изд. «Наука», М., 1967. [4] *П. Н. Еругин*, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. АН БССР, Минск, 1963. [5] *К. Г. Валеев, М. Я. Важговская*, Исследование устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Дифференциальные уравнения, т. VIII, № 6, 955—960, 1971. [6] *К. Г. Валеев, М. Я. Важговская*, «Украинский математический журнал», № 1, 63—70, 1971. [7] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, ГИТТЛ, М, 1954.