ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 4

УДК 534.2—16

МЕХАНИКА

С. Г. Саакян

О распространении упругих волн в средах при наличии осевой симметрии

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 30/III 1973)

Задача о распространении упругих волн при действии зависящих от времени радиальных давлений на поверхности сферической полости в неограниченной среде и на поверхности шара рассмотрена многими авторами ([1,2] и др.).

В настоящей работе получено аналитическое решение для случая, когда действующее на поверхности полости давление имеет вид произвольной функции одной угловой координаты и времени (осесимметричная задача). Для построения решения задачи требуется нахождение корней некоторых алгебраических уравнений. Эти корни определяют частоты собственных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде.

Падобная задача рассмотрена для изотропного упругого шара.

1. Распространение волн в упругом пространстве со сферической полостью.

Пусть (u_ρ, u_φ, u_θ) вектор перемешения в сферической системе координат (ρ, φ, θ), а упругая среда характеризуется постоянными Ламе λ, μ и плотностью ρ_0. В силу осевой симметрии задачи, $u_\varphi \equiv 0$ и u_ρ, u_θ не зависят от φ.

В этом случае уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial t^2} = c_d^2 \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} + \frac{c_s^2}{\rho \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta\,\Omega)}{\partial\theta} \quad \left(c_d^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = c_d^2 \frac{\partial \Delta}{\rho\,\partial\theta} - c_s^2 \frac{\partial(\rho\Omega)}{\rho\,\partial\rho} \quad \left(c_s^2 = \frac{\mu}{\rho_0}\right), \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial(\sin\theta\, u_\rho)}{\rho\,\partial\theta}$$

$$\Omega = \frac{\partial u_\rho}{\rho\,\partial\theta} - \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\rho\,\partial\rho}. \tag{1.2}$$

Будем рассматривать решение уравнений (1.1), удовлетворяющее следующим условиям

$$
\begin{aligned}
&1.\ u_\rho \to 0,\ u_\theta \to 0 \ \text{при}\ \rho \to \infty,\\
&2.\ u_\rho = u_\theta = \frac{\partial u_\rho}{\partial t} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,\\
&3.\ \sigma_{\rho\rho} = -\sigma_0 f(\theta,\ t),\ \sigma_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при}\ \rho = a,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

где $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\theta}$—компоненты тензора напряжений, a—радиус сферической полости.

Удобно ввести безразмерные независимые величины и написать все уравнения в этих переменных. С этой целью, в качестве характерной длины возьмем радиус сферической полости, характерного времени-величину $\tau_1 = a/c_d$, характерного смещения-величину $a\sigma_0/\mu$ и характерного напряжения—σ_0, т. е.

$$
\rho = aR, \quad t = a\tau/c_d, \quad u_\rho = \sigma_0 a U_\rho / \mu, \quad u_\theta = \sigma_0 a U_\theta / \mu, \quad \sigma_{ij} = \sigma_0 S_{ij}. \tag{1.4}
$$

После введения указанных безразмерных переменных и применения интегрального преобразования Лапласа с учетом условий (1.3) имеем уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
p^2 \overline{U_\rho} &= \frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial R} + \frac{1}{\gamma^2 R \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta\overline{\Omega})}{\partial\theta},\\
p^2 \overline{U_\theta} &= \frac{\partial \overline{\Delta}}{R\partial\theta} - \frac{1}{\gamma^2 R} \frac{\partial(R\overline{\Omega})}{\partial R}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

и граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\left[(\gamma^2 - 2)\overline{\Delta} + 2\frac{\partial \overline{U}_\rho}{\partial R}\right]_{R=1} = -\overline{f}(\theta, p)\\
&\left[\frac{1}{R}\frac{\partial \overline{U}_\rho}{\partial\theta} + \frac{\partial \overline{U}_\theta}{\partial R} - \frac{\overline{U}_\theta}{R}\right]_{R=1} = 0, \qquad (\gamma = c_d/c_s)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta} &= \frac{\partial(R^2\overline{U}_\rho)}{R^2\partial R} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\overline{U}_\theta),\\
\overline{\Omega} &= \frac{1}{R}\frac{\partial\overline{U}_\rho}{\partial\theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\overline{U}_\theta),
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

$$
\overline{f}(\theta, p) = \int_0^\infty f(\theta,\ \tau_1\tau) e^{-p\tau} d\tau, \tag{1.8}
$$

а $\overline{U_\rho}$, $\overline{U_\theta}$, $\overline{\Delta}$, $\overline{\Omega}$ определяются формулами, аналогичными (1.8).

Исключая $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Omega}$ из уравнений (1.5) и (1.7), получаем

$$
\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\overline{\Delta}}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\overline{\Delta}}{\partial R}\right) = p^2\overline{\Delta}, \tag{1.9}
$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\overline{\Omega})+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\overline{\Omega})\right]=\gamma^2p^2\overline{\Omega}.$$

Частные решения этих уравнений, которые можно найти методом неполного разделения переменных с учетом ограниченности $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Omega}$ в бесконечности, имеют вид

$$\overline{\Delta}_n=\frac{A_n(p)K_{n+\frac{1}{2}}(pR)P_n(\cos\theta)}{\sqrt{R}},\quad \overline{\Omega}_n=\frac{B_n(p)K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma pR)P_n^1(\cos\theta)}{\sqrt{R}},\tag{1.10}$$

где $K_{n+\frac{1}{2}}$ функция Макдональда, а P_n и P_n^1 функции Лежандра. Ряды вида

$$\overline{\Delta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(p)K_{n+\frac{1}{2}}(pR)P_n(\cos\theta)}{\sqrt{R}},\qquad \overline{\Omega}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n(p)K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma pR)P_n^1(\cos\theta)}{\sqrt{R}}\tag{1.11}$$

при любых $A_n(p)$ и $B_n(p)$ являются решениями уравнений (1.9).

Определим неизвестные величины $A_n(p)$ и $B_n(p)$ из граничных условий.

Подставляя $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Omega}$ в формулы (1.6) и, используя известные рекурентные соотношения для функций Макдональда и Лежандра, получаем

$$\left[\gamma^2K_{\frac{1}{2}}(p)+\frac{4}{p}K_{\frac{3}{2}}(p)\right]A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\left(\gamma^2+\frac{2n^2-2n}{p^2}\right)K_{n+\frac{1}{2}}(p)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{4}{p}K_{n+\frac{3}{2}}(p)\right]A_n+\frac{2n^2+2n}{\gamma^2p^2}\left[(n-1)K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p)-\gamma pK_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\right]B_n\Big\}P_n(\cos\theta)=$$

$$=-\overline{f}(\theta,p),\tag{1.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2n-2}{p^2}K_{n+\frac{1}{2}}(p)-\frac{2}{p}K_{n+\frac{3}{2}}(p)\right]A_n+\frac{1}{\gamma^2p^2}\left[\left(\gamma^2p^2+2n^2-2\right)K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\gamma pK_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\right]B_n\right\}P_n^1(\cos\theta)=0.$$

Разложим функцию $\overline{f}(\theta,p)$ в промежутке $[0,\pi]$ в ряд по функциям Лежандра $P_n(\cos\theta)$

$$\overline{f}(\theta,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{f}_n(p)P_n(\cos\theta),\tag{1.13}$$

где

$$\overline{f}_n(p)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\overline{f}(\theta,p)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.\tag{1.14}$$

В силу полноты функций Лежандра в промежутке $[0, \pi]$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, решения которой определяет неизвестные величины A_n и B_n.

Решая эту бесконечную систему и подставляя значения A_n и B_n в формулы (1.11), определим функции $\bar{\Delta}$ и $\bar{\Omega}$, а через них перемещения.

Имеем

$$\overline{U}_\rho = \frac{\bar{f}_0(p) K_{\frac{3}{2}}(pR)}{\sqrt{R}\, p \left[\gamma^2 K_{\frac{1}{2}}(p) + \frac{4}{p} K_{\frac{3}{2}}(p)\right]} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_n(p) L_n(p, R) P_n(\cos\theta)}{\sqrt{R^3}\, p^2 N_n(p)}$$

$$\overline{U}_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_n(p) M_n(p, R) P_n^1(\cos\theta)}{\sqrt{R^3}\, p^2 N_n(p)}, \tag{1.15}$$

где

$$L_n(p, R) = \frac{1}{\gamma^2 p^2}\Big\{\Big[(\gamma^2 p^2 + 2n - 2) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p) + 2\gamma p K_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\Big]\Big[n K_{n+\frac{1}{2}}(pR) -$$

$$- pR K_{n+\frac{3}{2}}(pR)\Big] - (n^2 + n)\Big[(2n-2) K_{n+\frac{1}{2}}(p) - 2p K_{n+\frac{3}{2}}(p)\Big] K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p R)\Big\},$$

$$M_n(p, R) = \frac{1}{\gamma^2 p}\Big\{\Big[(\gamma^2 p^2 + 2n^2 - 2) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p) + 2\gamma p K_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\Big] K_{n+\frac{1}{2}}(pR) -$$

$$- \Big[(2n-2) K_{n+\frac{1}{2}}(p) - 2p K_{n+\frac{3}{2}}(p)\Big]\Big[(n+1) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p R) - \gamma p R K_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p R)\Big]\Big\}, \tag{1.16}$$

$$N_n(p) = \frac{1}{\gamma^2 p^2}\Big\{\Big(\gamma^2 + \frac{2n^2 + 2n}{p^2}\Big) K_{n+\frac{1}{2}}(p) + \frac{4}{p} K_{n+\frac{3}{2}}(p)\Big]\Big[(\gamma^2 p^2 + 2n^2 - 2) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p) +$$

$$+ 2\gamma p K_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\Big] - (2n^2 + 2n)\Big[\frac{2n-2}{p^2} K_{n+\frac{1}{2}}(p) - \frac{2}{p} K_{n+\frac{3}{2}}(p)\Big] \times$$

$$\times \Big[(n-1) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p) - \gamma p K_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\Big]\Big\}.$$

Корни уравнения $N_n(p) = 0$ определяют частоты собственных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде.

Обращение $\overline{U}_\rho$ и $\overline{U}_\theta$ определяет перемещения, через которые легко определяются остальные динамические характеристики движения.

Имеем

$$U_\rho = \frac{1}{2\pi i}\Big\{\frac{1}{\sqrt{R}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{K_{\frac{3}{2}}(p, R) e^{p\tau}}{\gamma^2 K_{\frac{1}{2}}(p) + \frac{4}{p} K_{\frac{3}{2}}(p)} \frac{dp}{p} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n(\cos\theta)}{\sqrt{R^3}}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\overline{f}_n(p)L_n(p,R)e^{p\tau}dp}{p^2N_n(p)}\Bigg|$$

$$U_\theta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sqrt{R^3}}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\overline{f}_n(p)M_n(p,R)e^{p\tau}dp}{pN_n(p)}, \tag{1.17}$$

где $\sigma>0$ выбрано в комплексной плоскости p таким образом, чтобы все особенности подинтегральных функций лежали левее прямой $\mathrm{Re}\,p=\sigma$.

В частности, из полученных формул следуют известные результаты [2] при $f(\theta,\tau)=H(\tau)$, где H — функция Хевисайда. Действительно, известно [3], что модифицированная функция Макдональда порядка $n+\frac{1}{2}$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ является элементарной, т. е.

$$K_{n+\frac{1}{2}}(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi p}}\,e^{-p}\sum_{l=0}^{n}\frac{(n+l)!}{2^l l!(n-l)!p^l}. \tag{1.18}$$

Пользуясь этой формулой и теоремой Коши о вычетах, получаем

$$U_\rho=\frac{1}{4R^2}\Bigg\{1-e^{\frac{-2(\tau-R+1)}{\gamma_1^2}}\Bigg[\cos\frac{2\sqrt{\gamma_1^2-1}}{\gamma_1^2}(\tau-R+1)-$$

$$\frac{2R-1}{\sqrt{\gamma_1^2-1}}\sin\frac{2\sqrt{\gamma_1^2-1}}{\gamma_1^2}(\tau-R+1)\Bigg]\Bigg\}\quad\text{при}\quad\tau>R-1 \tag{1.19}$$

$$U_\rho=0\qquad\text{при}\qquad\tau<R-1,\qquad U_\theta\equiv 0.$$

Линия $\tau-R+1=0$ в плоскости (τ, R) определяет фронт распространяющейся волны.

В случае, когда на поверхности сферической полости в неограниченной упругой среде с постоянными Ламе $\lambda=\mu$ приложено давление $f(\theta,\tau)=\delta(\tau)(1+\cos\theta)$, где δ — дельта функция Дирака, из общих формул (1.17) получим решение, если на плоскости p прямую $\mathrm{Re}\,p=\sigma$ замыкаем дугам окружности с бесконечно большим радиусом, применяя затем теорему Коши о вычетах.

При этом получается, что под действием радиального давления $\delta(\tau)(1+\cos\theta)$ на поверхности сферической полости, в среде распространяются продольная и поперечная волны со сферическими фронтами $\tau-R+1=0$, $\tau-2R+2=0$ соответственно. По мере удаления от поверхности сферической полости перемещения стремятся к нулю как $1/R$.

На рис. 1. изображен график зависимости перемещений на поверхности сферической полости от времени для трех значений $\theta: 0$, $\pi/3$ и $\pi/2$.

2. Распространение волн в упругом шаре.

Предположим, что сферической поверхности упругого шара с радиусом a действует давление, равное $\sigma_0 f(\theta, \tau)$ при $\tau>0$ и нулю при $\tau<0$. Требуется найти решение уравнений (1.1) и (1.2), удовлетворяющее в безразмерных величинах следующим условиям

1. U_ρ и U_θ ограничены при $R<1$,

2. $$U_\rho = U_\theta = \frac{\partial U_\rho}{\partial \tau} = \frac{\partial U_\theta}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0 \qquad (2.1)$$

3. $S_{RR} = -f(\theta, \tau)$, $S_{R\theta} = 0$ при $R=1$.

Решение уравнений (1.9), удовлетворяющее условие (1) формул (2.1), имеет вид

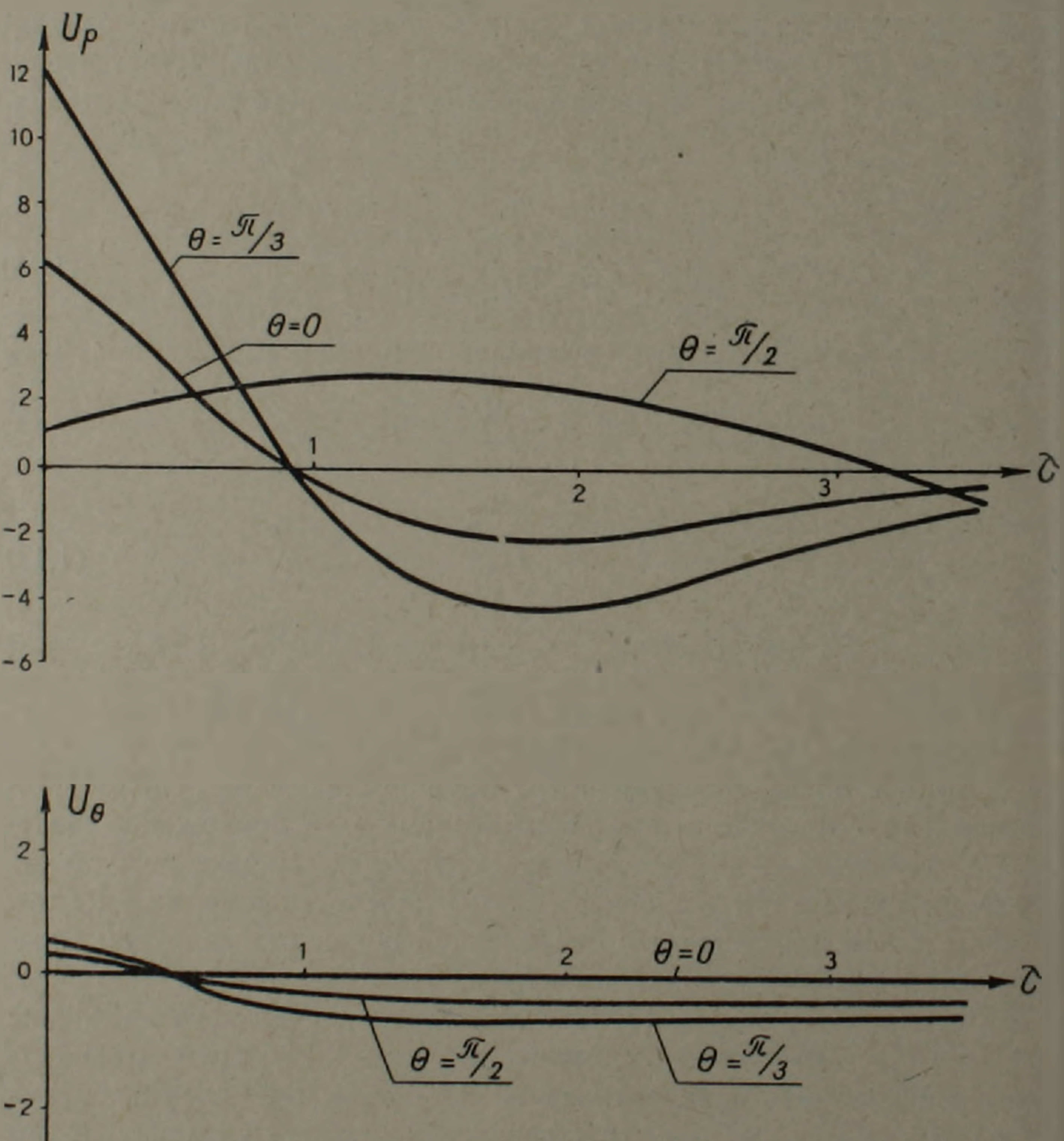

Рис. 1

$$\bar{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(p) I_{n+\frac{1}{2}}(pR) P_n(\cos\theta)}{\sqrt{R}}, \qquad \bar{\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n(p) I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p R) P_n^1(\cos\theta)}{\sqrt{R}}, \qquad (2.2)$$

где C_n и D_n неизвестные величины. Определим эти величины таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (3) (2.1). После подстановки $\bar\Delta$ и $\bar\Omega$ в граничные условия получаем

$$\left[\gamma^2 I_{\frac{1}{2}}(p)-\frac{4}{p}I_{\frac{3}{2}}(p)\right]C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\left(\gamma^2+\frac{2n^2-2n}{p^2}\right)I_{n+\frac{1}{2}}(p)-\frac{4}{p}I_{n+\frac{3}{2}}(p)\right]C_n+\right.$$
$$\left.+\frac{2n^2+2n}{\gamma^2p^2}\left[(n-1)I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p)+\gamma p I_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\right]D_n\right\}P_n(\cos\theta)=-\bar f(\theta,p)$$
$$(2.3)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2n-2}{p^2}I_{n+\frac{1}{2}}(p)+\frac{2}{p}I_{n+\frac{3}{2}}(p)\right]C_n+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma^2p^2}\left[(\gamma^2p^2+2n^2-2)I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma p)-2\gamma p I_{n+\frac{3}{2}}(\gamma p)\right]P_n\right\}P_n^1(\cos\theta)=0.$$

После разложения функции $\bar f(\theta,p)$ в промежутке $[0,\pi]$ в ряд по функциям Лежандра $P_n(\cos\theta)$, по формулам (1.13), (1.14), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов C_n и D_n.

Зная величины C_n и D_n, по формулам (2.2) определяем $\bar\Delta$ и $\bar\Omega$. Подставляя $\bar\Delta$ и $\bar\Omega$ в соотношения (1.5) и обращая преобразование Лапласа, определим перемещения U_ρ и U_θ, а через них и другие динамические характеристики движения: скорость, ускорение и напряжения.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса.

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Առաձգական ալիքների տարածումը միջավայրերում առանցքային սիմետրիայի առկայության դեպքում

Հոդվածում բերվում են սֆերիկ խոռոչով տարածության և գնդի համար առաձգականության դինամիկական տեսության խնդիրների լուծումները, երբ միջավայրերի մակերևույթին կիրառված ճնշումը ֆունկցիա է ժամանակից և և մեկ անկյունային կոորդինատից։ Այդ խնդիրների լուծումները, երբ ալիքային հավասարումների և եզրային պայմանների նկատմամբ կիրառում ենք Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխությունը, ստացվում են փոփոխականների ոչ լրիվ անջատման եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *I. Bhattacharya*, Gerlands Beitr. Geophys, vol. 7, № 3, 1969. [2] *H. Matsumoto, J. Nakanara*, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, № 104, 1971. [3] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, М., ч. 1, ИЛ, 1949.