ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 4

УДК 624.072.233

МЕХАНИКА

В. С. Саркисян, Л. О. Овсепян

Об одной контактной задаче для двух анизотропных полуплоскостей, соединяющихся по границам упругой накладкой конечной длины

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 26/III 1973)

Контактная задача для упругой изотропной полуплоскости, усиленной упругим креплением в виде накладки, исследовалась в работе ([1]).

Контактная задача для двух изотропных полуплоскостей соединенных упругими креплениями вдоль границ, была рассмотрена в работе ([2]).

В настоящей работе излагается решение одной контактной задачи для двух анизотропных полуплоскостей, соединенных по границам упругой накладкой, с учетом температурных воздействий.

Решение этой задачи сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши второго рода, которые позволяют определить контактные напряжения вдоль участков креплений упругой накладки с анизотропными полуплоскостями. Полученная система интегральных уравнений решается методом ортогональных многочленов и приводится к бесконечным алгебраическим системам линейных уравнений. Одновременно показано, что учет анизотропии материалов полуплоскостей существенно меняет закон распределения контактных напряжений и вид их особенностей в окрестностях концов упругой накладки.

1. Пусть две анизотропные, имеющие одну плоскость упругой симметрии, полуплоскости соединены по отрезку $[-a, a]$ своих свободных границ упругим креплением в виде приваренной (или приклеенной) накладки, имеющей достаточно малую толщину h (рис. 1).

Ввиду малости толщины накладки считается, что после деформации накладка имеет прежнюю толщину, т. е. не происходит изменения ее толщины.

Предположим также, что температура накладки изменяется от t_1 до t_2. Определим закон распределения контактных напряжений вдоль линий креплений упругой накладки к полуплоскостям, имеющим одинаковые упругие постоянные. В отличие от работ ([3,4]), здесь учитываются и нормальные контактные напряжения, которые будем обозначать σ. В силу симметрии задачи можно рассмотреть равновесие одной полуплоскости с упругой накладкой, когда на накладку действует сила P, направленная вдоль оси накладки, касательные $\tau(x)$ и нормальные напряжения $\sigma(x)$ (рис. 2).

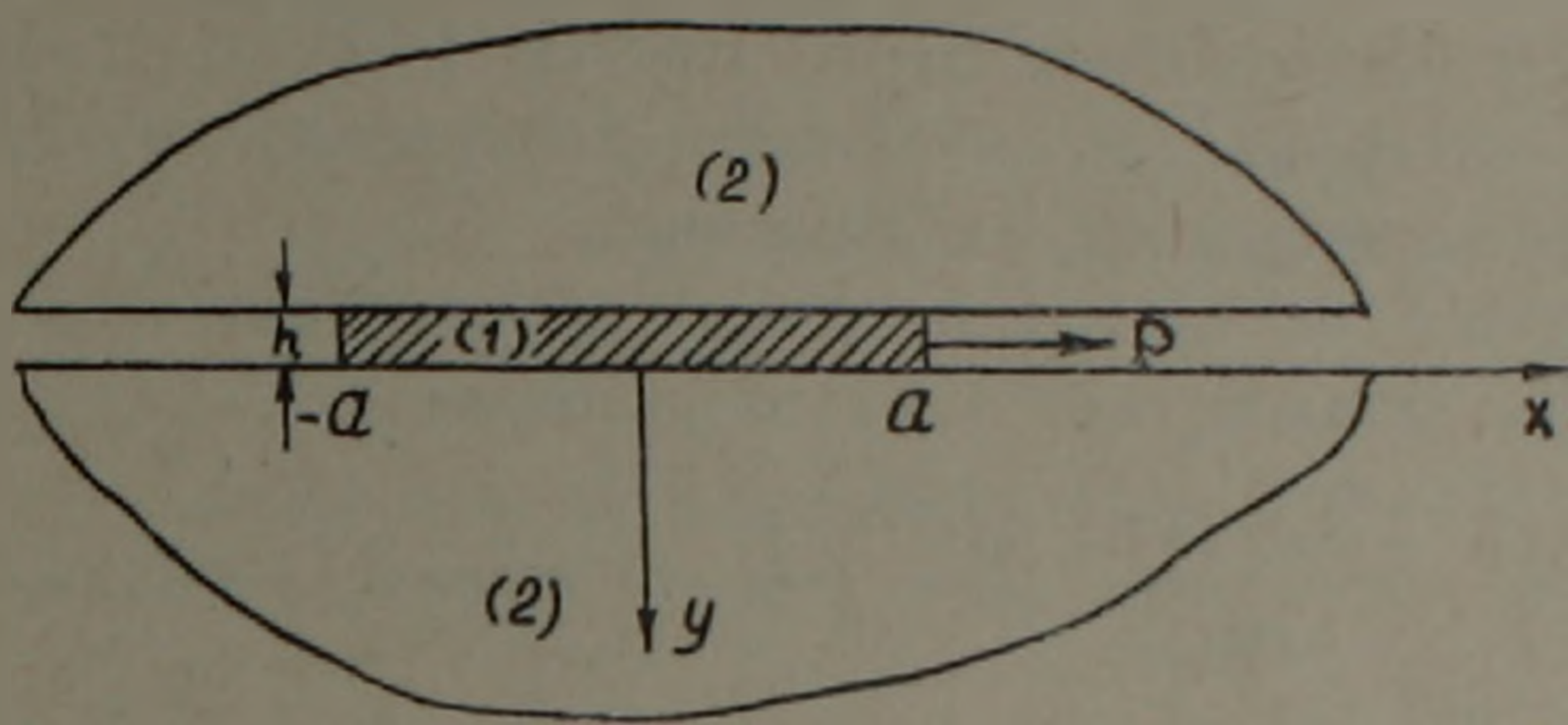

Рис. 1

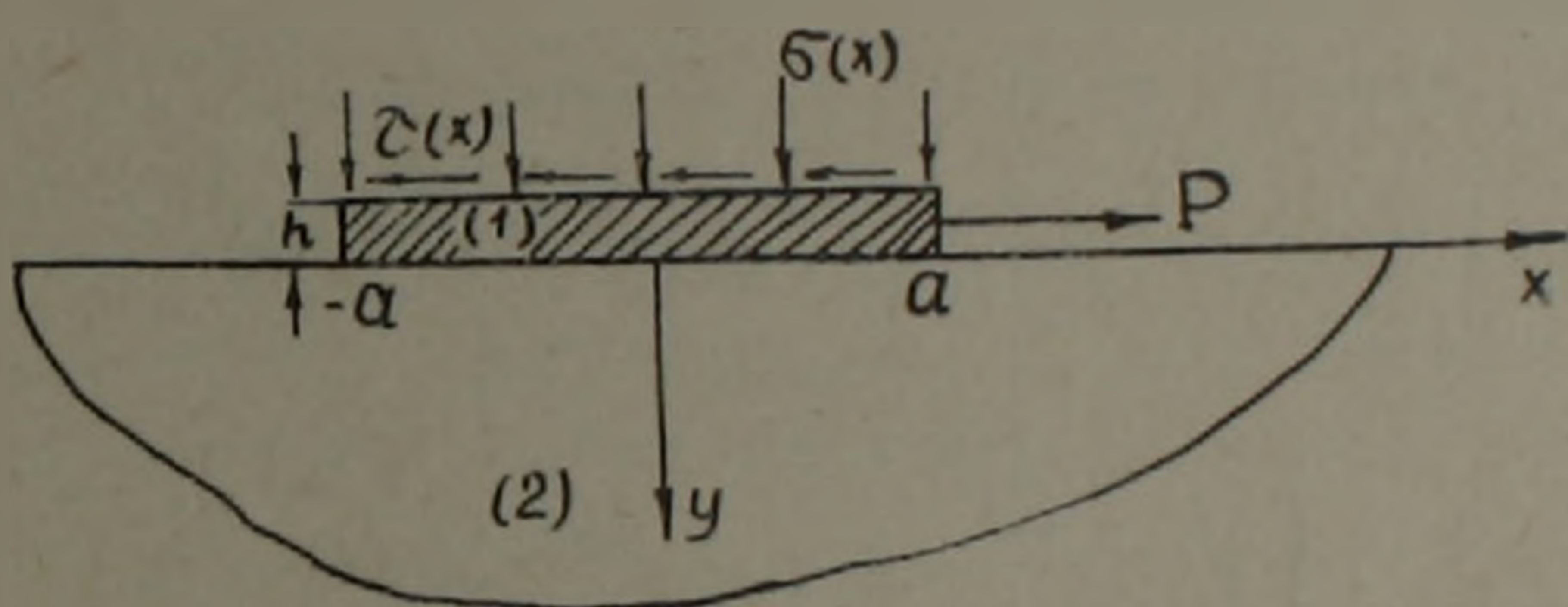

Рис. 2

Из уравнения равновесия элемента накладки, учитывая закон Гука, можно записать

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{2}{hE_1}\int\limits_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)ds + \alpha_1 \Delta t. \qquad (1.1)$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек соединения накладки с упругими анизотропными полуплоскостями. E_1 — модуль упругости материала накладки, $\tau^{(1)}(x)$ — касательные контактные напряжения, действующие на накладку вдоль линий соединения ее с полуплоскостями, α_1 — коэффициент линейного расширения накладки, $\Delta t = t_2 - t_1$.

С другой стороны известно ([5]), что выражения для производных от перемещений на границе анизотропной полуплоскости $\frac{du^{(2)}(x)}{dx}$ и $\frac{dv^{(2)}(x)}{dx}$ в зависимости от внешней нагрузки, действующее на конечном отрезке $[-a, a]$, имеют вид

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{A_1^{(2)}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\sigma^{(2)}(s)\frac{ds}{s-x} + B_1^{(2)}\sigma^{(2)}(x) + \frac{A_2^{(2)}}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\tau^{(2)}(s)\frac{ds}{s-x} + B_2^{(2)}\tau^{(2)}(x) + \alpha_2\Delta t$$

$$\frac{dv^{(2)}}{dx} = \frac{A_3^{(2)}}{\pi}\int_{-a}^{a}\sigma^{(2)}(s)\,\frac{ds}{s-x} + B_3^{(2)}\sigma^{(2)}(x) + \frac{A_4^{(2)}}{\pi}\int_{-a}^{a}\tau^{(2)}(s)\,\frac{ds}{s-x} + B_4^{(2)}\tau^{(2)}(x), \quad (1.2)$$

где $A_j^{(2)}$, $B_j^{(2)}$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ зависят от упругих коэффицентов материала полуплоскости, $u^{(2)}(x)$ и $v^{(2)}(x)$—соответственно горизонтальные и вертикальные перемещения точек отрезка $[-a,\ a]$ границы полуплоскости; α_2—коэффициент линейного расширения материала полуплоскости в горизонтальном направлении.

На участке $[-a,\ a]$ контакта упругой накладки с анизотропной полуплоскостью должны иметь место условия:

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx}, \quad \frac{dv^{(2)}(x)}{dx} = 0 \quad (y=0,\ -a<x<a). \quad (1.3)$$

При помощи (1.1), (1.2) и (1.3) для определения контактных напряжений можно получить

$$\int_{-a}^{a}\varphi_*'(s)\frac{ds}{s-x} + \mu_1\int_{-a}^{a}\psi_*'(s)\,\frac{ds}{s-x} + \mu_2\varphi_*'(x) + \mu_3\psi_*'(x) = \lambda\psi_*(x) + \frac{\pi(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t}{A_1^{(2)}};$$

$$\int_{-a}^{a}\varphi_*'(s)\,\frac{ds}{s-x} + \mu_4\int_{-a}^{a}\psi_*'(s)\,\frac{ds}{s-x} + \mu_5\varphi_*'(x) + \mu_6\psi_*'(x) = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\tau_*(x) = \tau^{(1)}(x) = \tau^{(2)}(x), \quad \varphi_*'(x) = \sigma^{(2)}(x), \quad \psi_*'(x) = \tau_*(x),$$

$$\psi_*(x) = \int_{-a}^{x}\tau_*(s)ds, \quad \lambda = 2\pi/hE_1A_1^{(2)}, \quad \mu_1 = A_2^{(2)}/A_1^{(2)},$$

$$\mu_2 = \frac{\pi B_1^{(2)}}{A_1^{(2)}}, \quad \mu_3 = \frac{\pi B_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}, \quad \mu_4 = \frac{A_4^{(2)}}{A_2^{(2)}}, \quad \mu_5 = \frac{\pi B_3^{(2)}}{A_3^{(2)}}, \quad \mu_6 = \frac{\pi B_4^{(2)}}{A_3^{(2)}}.$$

Система функциональных уравнений (1.4) должна рассматриваться при граничных условиях:

$$\psi_*(-a) = 0, \quad \psi_*(a) = \frac{P}{2}, \quad \int_{-a}^{a}\varphi_*'(s)ds = 0. \quad (1.5)$$

Положим $x=a\xi$, $s=a\eta$, $\varphi_*(x)=\varphi_*(a\xi)=\varphi(\xi)$, $\varphi_*(s)=\varphi_*(a\eta)=\varphi(\eta)$ $\psi_*(x)=\psi_*(a\xi)=\psi(\xi)$, $\psi_*(s)=\psi(a\eta)=\psi(\eta)$ и снова введем переменные x и s, систему уравнений (1.4) запишем в виде:

$$\int_{-1}^{1}\varphi'(s)\,\frac{ds}{s-x} + \mu_1\int_{-1}^{1}\psi'(s)\,\frac{ds}{s-x} + \mu_2\varphi'(x) + \mu_3\psi'(x) = \lambda a\psi(x) + \frac{\pi a(\alpha_1-\alpha^2)\Delta t}{A_1^{(2)}}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi'(s)\frac{ds}{s-x}+\mu_4\int_{-1}^{1}\psi'(s)\frac{ds}{s-x}+\mu_5\varphi'(x)+\mu_6\psi'(x)=0. \tag{1.6}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.6) при граничных условиях:

$$\psi(-1)=0, \qquad \psi(1)=\frac{P}{2}, \quad \int_{-1}^{1}\varphi'(s)ds=0.$$

2. Выясним тип особенностей для рассматриваемой задачи. Как в работе [6], $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ представим в виде

$$\varphi'(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\chi_1(x),\ \psi'(x)=(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\delta}\chi_2(x)\begin{pmatrix}-1<x<1\\-1<\mathrm{Re}(\alpha,\beta,\gamma)<0\end{pmatrix},$$

где $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющие условию Гельдера.

Отправляясь от этих представлений, на основе результатов [7], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, $\alpha+\beta=-1$. α определяется из уравнения:

$$\pi^2(\mu_1-\mu_4)\mathrm{ctg}^2\pi\alpha+\pi(\mu_6-\mu_3+\mu_2\mu_4-\mu_1\mu_5)\mathrm{ctg}\pi\alpha+\mu_3\mu_5-\mu_2\mu_6=0,$$

при условии $-1<\mathrm{Re}(\alpha)<0$.

3. Для решения системы уравнений (1.6), представим $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ в виде

$$\chi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x),\quad \chi_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Здесь $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ многочлены Якоби [8] ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Контактные напряжения определяются по формулам:

$$\tau(x)=a\tau_*(ax)=\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}Y_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)\quad(-1<x<1),$$

$$\sigma(x)=a\sigma^{(2)}(ax)=\omega(x)\sum_{n=0}^{\infty}X_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)\quad(-1<x<1). \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.6) и принимая во внимание [3]

$$\int_{-1}^{1}\frac{\omega(s)P_n^{(\alpha,\beta)}(s)ds}{s-x}=\pi\mathrm{ctg}\pi\alpha\,\omega(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-\frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}P_{n-1}^{(\beta+1,\alpha+1)}(x),$$

где $|x|<1$, $\mathrm{Re}(\alpha, \beta)>-1$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $\alpha+\beta=-1$, после несложных действий для определения неизвестных коэффициентов X_n и Y_n ($n=1, 2, 3, \ldots$) получаем следующие бесконечные системы линейных уравнений:

$$X_{k+1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}X_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}Y_n+M_k$$

$$Y_{k+1}=\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk}X_n+\sum_{n=1}^{\infty} d_{nk}Y_n+N_k \quad (k=0, 1, 2, \ldots) \qquad (3.2)$$

Здесь

$$M_k=\frac{Y_0\sin\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\,\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\,\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1}\Big[\mu_1\mu_6-\mu_3\mu_4+$$

$$+\lambda a\mu_4(1-x)^{\beta+1}(1+x)^{\alpha+1}\int_{-1}^{x} w(s)ds\Big]P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)dx-C\mu_4\delta_k,$$

$$N_k=\frac{Y_0\sin\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\,\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\,\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1}\Big[\mu_3-\mu_6+(\mu_1-\mu_4)\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha-$$

$$-\lambda a(1-x)^{\beta+1}(1+x)^{\alpha+1}\int_{-1}^{x} w(s)ds\Big]P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)dx+C\delta_k, \qquad (3.3)$$

$$a_{nk}=\frac{\mu_1\mu_5-\mu_2\mu_4+(\mu_1-\mu_4)\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\sin\pi\alpha\times$$

$$\times\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\,\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)dx,$$

$$b_{nk}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\,\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1}\Big[(\mu_1\mu_6-\mu_3\mu_4)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-$$

$$-\frac{\lambda a\mu_4}{2n}(1-x^2)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Big]P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)dx,$$

$$C_{nk}=\frac{(\mu_2-\mu_5)\sin\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\,\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\,\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)dx,$$

$$d_{nk}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi(\mu_1-\mu_4)}\,\frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\alpha)\Gamma(k+2+\beta)}\int_{-1}^{1}\Big\{[\mu_3-\mu_6+(\mu_1-\mu_4)\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+$$

$$+\frac{\lambda a}{2n}(1-x^2)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Bigg\} P_k^{(\beta+1,\alpha+1)}(x)\,dx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3.4}$$

где

$$C=\frac{2a(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t}{(\mu_1-\mu_2)A_1^{(2)}}\sin\pi\alpha, \qquad \delta_k=\begin{cases}-1 & \text{при } k=0\\ \ \ 0 & \text{при } k\geqslant 1\end{cases}$$

Коэффициенты X_0 и Y_0 определяются из условий (1.7) и даются формулами $X_0=0$, $Y_0=-P\sin\pi\alpha/2\pi$.

Исследование на регулярность бесконечных систем линейных уравнений (3.2) показывает, что в ядрах этих систем содержатся некоторые члены, порождающие расходящие ряды. Возможно, что полученные бесконечные системы можно преобразовать к виду, свободному от указанного недостатка. Более того, следуя методам работы [2] и обобщая их, можно показать, что если обрывать ряды в формулах (3.1) и (3.2), беря тем самым конечное число слагаемых, то для определения неизвестных коэффициентов получаются конечные системы алгебраических уравнений, равносильные по существу полученным нами соответствующим системам. Этим способом можно решение поставленной задачи, как в [2], довести до конца.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Եզրերով վերջավոր առաձգական վերադիրով միացված երկու անիզոտրոպ կիսահարթությունների մի կոնտակտային խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկված է եզրերով առաձգական վերադիրով միացված երկու անիզոտրոպ կիսահարթությունների մի խնդիր ջերմության հաշվառումով։ Ենթադրվում է, որ կիսահարթությունների նյութերը նույնն են։

Խնդրի լուծումը բերվում է Կոշու կորիզով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, որը թույլատրում է որոշել շոշափող և նորմալ լարումները վերադիրի և կիսահարթությունների միացման միջակայքերի երկարությամբ։ Ստացված հավասարումների սիստեմը լուծված է օրթոգոնալ բազմանդամների եղանակով։

Միաժամանակ ցույց է տրվում, որ կիսահարթությունների նյութերի անիզոտրոպիայի հաշվառումն էապես փոխում է կոնտակտային լարումների բաշխվածությունն առաձգական վերադիրների տակ և նրանց եզակիությունները վերադիրի ծայրակետերում։

Ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը բերված է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 32, вып. 4(1968). [2] *Hans Bufler*, VDI—Forschung cheft 485, Beilage zu „Forchung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" Ausgabe B Band 27, 1961. [3] *В. С. Саркисян, Л. О. Овсепян*, ДАН Арм. ССР, т. LII, №5 (1971). [4] *В. С. Саркисян, Л. О. Овсепян*, ДАН Арм. ССР, т. LIII №2 (1971). [5] *Л. А. Галин*, Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат. [6] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, Некоторые контактные задачи для полуплоскости с упругими накладками. Последние достижения в области упругости и термоупругости, Варшава, 1971. [7] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения. Изд. з, «Наука», М., 1968. [8] *Г. Сегё*, Ортогональные многочлены, Физматгиз, М. 1962. [9] *Л. В. Конторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Изд. 5. Физматгиз, М.-Л., 1962.