ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LVII 1973 4

УДК 517.522

МАТЕМАТИКА

Л. А. Шагинян

О суммируемости рядов по системе Хаара методами (C, α) и (H, k)

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 5/V 1973)

1. Пусть $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, . . . система функций Хаара, перенумерованная в порядке:

$\chi_0^{(0)}(x)$, $\chi_0^{(1)}(x)$, $\chi_1^{(1)}(x)$, $\chi_1^{(2)}(x)$, . . ., $\chi_n^{(1)}(x)$, . . ., $\chi_n^{(2^n)}(x)$. (см. (1) стр.57)

В работе (2) А. А. Талаляном и Ф. Г. Арутюняном была доказана

Теорема А. *Ряды по системе Хаара и Уолша не могут сходиться к $+\infty$ на множествах положительной меры.*

При этом в случае системы Хаара Ф. Г. Арутюняном (3) была установлена несколько более общая

Теорема В. *Пусть имеем ряд по системе Хаара*

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$

Если на некотором измеримом множестве G

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_k(x) > -\infty,$$

то ряд Ω почти всюду на G сходится к конечной функции.

Другие более краткие доказательства теорем А и В впоследствии были приведены в работах (4,5), в которых, однако, использованы ранее известные результаты.

Введем следующее определение.

Скажем, что положительная, треугольная, бесконечная матрица $A = (\alpha_{k,p})$ определяет метод суммирования $T^{(\gamma)}$, $(\gamma > 0)$, если

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{k,p} = 0$; $p = 0, 1, \ldots$

2. $\sum\limits_{p=0}^{k} \alpha_{k,p} < Q$; $k = 0, 1, \ldots$

3. $\sum\limits_{p=\left[\frac{k}{2}\right]}^{k} \alpha_{k,p} > \gamma$; $k = 2, 3, \ldots$

$\left[\frac{k}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{k}{2}$.

Для метода суммирования $T^{(\gamma)}$, $(\gamma>0)$ положим

$$\sigma_n(\gamma,\ x)=\alpha_{n,1}S_1(x)+\alpha_{n,2}\,S_2(x)+\ .\ .\ .+\alpha_{n,n}S_n\,(x).$$

Не трудно проверить, что любой метод суммирования Чезаро $(C,\ \alpha)$; $(\alpha>-1)$ и любой метод суммирования Гельдера $(H,\ k)$ *) являются методами $T^{(\gamma)}$, $(\gamma>0)$.

В настоящей работе, путем применения метода, который в некотором смысле близок к методу, примененному в работах [1,2], устанавливается следующая теорема, являющаяся усилением теоремы В.

Теорема 1. *Если на некотором измеримом множестве G*

$$\liminf_{n\to\infty}\sigma_n(\gamma,\ x)>-\infty,\quad(\gamma>0),$$

то ряд Ω почти всюду на G сходится к конечной функции.

Как следствие теоремы 1 получаем.

Теорема 2. *Ряды по системе Хаара не суммируются к $+\infty$ на множествах положительной меры ни одним методом $T^{(\gamma)}(\gamma>0)$.*

II. Приведем некоторые вспомогательные обозначения и утверждения. а) Через Δ_k; $k=1,\ 2,\ .\ .\ .$ обозначим носитель функции $\chi_k(x)$; $k=1,\ 2,\ .\ .\ ..$ Для удобства обозначим индекс произвольного интервала $\Delta\in\{\Delta_k\}$ через $[\Delta]$. Итак, $[\Delta_k]=k$; $k\geq 1$. Если обозначим через $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ соответственно, левую и правую половины произвольного интервала $\Delta\in\{\Delta_k\}$, то будем иметь, что $\Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)}\in\{\Delta_k\}$, причем

$$[\Delta^{(1)}]=2[\Delta],\quad[\Delta^{(2)}]=2[\Delta]+1.\tag{1}$$

Замечание 1. Для всех $n\leq[\Delta]-1$, функции $S_n\,(x)=\sum_{k=0} a_k\chi_k\,(x)$, $\sigma_n(\gamma,\ x)$ постоянны на интервале Δ. А если в ряде Ω коэффициенты всех функций, носители которых совпадают с Δ или содержатся в Δ, равны нулю, то функции $S_n\,(x)$ и $\sigma_n\,(\gamma,\ x)$ постоянны на интервале Δ для любого $n>0$.

В дальнейшем, если на некотором интервале Δ функции $S_n\,(x)$ и $\sigma_n\,(\gamma,\ x)$ постоянны, то их значения, обозначим соответственно, через $S_n\,(\Delta)$ и $\sigma_n\,(\gamma,\ \Delta)$.

Для произвольного Δ **) и ряда Ω определим ряд

$$H(\Omega,\ \Delta)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*\chi_k\,(x)$$

следующим образом: $\quad a_0^*=a_0$,

а при $k\geq 1$, $\quad a_k^*=\begin{cases}0, & \text{если } \Delta_k\subseteq\Delta;\\ a_k, & \text{если } \Delta_k\supset\Delta,\ \Delta_k\neq\Delta;\\ b_k, & \text{если } \Delta_k\cap\Delta=\varnothing;\end{cases}$

*) Определения $(C,\ \alpha)$ и $(H,\ k)$ см. [6] (стр. 409—411).

**) В статье мы будем оперировать только интервалами системы $\{\Delta_k\}$. Так что, если не будет необходимости, мы не будем этого оговаривать.

где b_k любые действительные числа.

Из определения ряда $H(\Omega, \Delta)$ следует, что функции $S_n^*(x)=$ $=\sum_{k=0}^{n} a_k^*\chi_k(x)$ и $\sigma_n^*(\gamma, x)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}S_k^*(x)$ постоянны на интервале Δ. Имеем $S_n^*(x)=S_n^*(\Delta)$, $\sigma_n^*(\gamma, x)=\sigma_n^*(\gamma, \Delta)$ для всех $n\geqslant 0$ и $x\in\Delta$.

Сформулируем две леммы, доказательства которых легко получаются из определений $T^{(\gamma)}$, Ω^* и из соотношения (1).

Лемма 1. *Для любого интервала* $\Delta\in\{\Delta_k\}$, *из условий*

$$1.\ \sigma_{[\Delta]-1}(\gamma, \Delta)>-M \qquad (M>0)$$

$$2.\ S_k(\Delta)<C \quad (C<0);\quad k\leqslant[\Delta]-1$$

следует, что

$$S_{[\Delta]-1}(\Delta)>-\frac{M+QC}{\gamma}.$$

Лемма 2. *Для любого интервала* $\Delta\in\{\Delta_k\}$ *из условий*

$$1.\ \sigma_k(\gamma, \Delta)>-M \quad (M>0),\ k\leqslant[\Delta]-1$$

$$2.\ S_k(\Delta)<C \qquad (C>0),\quad k\leqslant[\Delta]-1$$

следует, что

$$\sigma_k^*(\gamma, \Delta)\geqslant-Q\frac{M+QC}{\gamma};\quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

б) Введем обозначения. Для любого замкнутого множества G через $K_1(G)$ обозначим подпоследовательность последовательности $\{\Delta_k\}$, составленную из всех тех Δ, одна половина которых имеет с G непустое пересечение, а другая половина пустое пересечение. Эти половины обозначим, соответственно, через Δ^+ и Δ^-. Итак, если $\Delta\in K_1(G)$, то $\Delta^+\cap G\neq\varnothing$; $\Delta^-\cap G=\varnothing$.

Не трудно убедиться, что

$$\sum_{\Delta\in K_1(G)}|\Delta|<+\infty \quad (|\Delta|\text{—длина интервала } \Delta), \tag{2}$$

$$[0,1]/G\subset\bigcup_{\Delta\in K_1(G)}\Delta^-\ ^{*)}. \tag{3}$$

в) Для произвольной совокупности интервалов K из $\{\Delta_k\}$, определим последовательность интервалов $K^*=\{\Delta_k^*\}\subset K$ следующим образом: Δ_1^*—интервал из K с наименьшим индексом. Если интервалы $\Delta_1^*,\ldots,\Delta_n^*$ уже выбраны, то в качестве Δ_{n+1}^* берется тот интервал из K, который не пересекается ни с одним интервалом Δ_i^*; $i=1, 2, \ldots, n$ и имеет наименьший индекс.

Из построения K^* имеем:

1°. $\Delta_i^*\cap\Delta_j^*=\varnothing$ для любых i и j, $i\neq j$;

2°. $\sum_k|\Delta_k^*|<+\infty$;

---

*) В статье мы везде пренебрегаем двоично рациональными точками. Так, что не оговаривая каждый раз, в дальнейшем мы всюду под [0,1] подразумеваем все точки [0,1], кроме вышеуказанных.

3°. Для любых $\Delta^* \in K^*$ и $\Delta \in K$ из соотношения $\Delta^* \subseteq \Delta$ следует $\Delta^* = \Delta$.

4°. $\bigcup\limits_{\Delta \in K} \Delta = \bigcup\limits_{\Delta^* \in K^*} \Delta^*$ (как точечные множества).

III. Доказательство основной леммы.

Лемма 3. *Пусть $M > 0$. Если на некотором множестве положительной меры G ($|G| > 0$)*

$$\sigma_n(\gamma, x) > -M; \quad n = 0, 1, \ldots,$$

то

$$\limsup_{n \to \infty} S_n(x) < +\infty \quad \text{п. в. на } G.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует замкнутое множество $G_1 \subset G$; $|G_1| > 0$ такое, что

$$\sigma_n(\gamma, x) > -M \quad \text{для всех } x \in G_1; \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

и

$$\limsup_{n \to \infty} S_n(x) = +\infty \quad \text{для всех } x \in G_1. \tag{5}$$

Для числа ε,

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ \frac{|G_1|}{2\left(2 + \frac{Q^2}{\gamma}\right)}, \quad \frac{\gamma}{QM} \right\} \tag{6}$$

составим множество $K_1(G_1) = K_1$ (см. пункт II б) и согласно (2) выберем n_1 такое, что

$$\sum_{\Delta \in K_1; [\Delta] > n_1} |\Delta| < \varepsilon. \tag{7}$$

Положим

$$C_1 = \max \left\{ M, \max_{\Delta \in K_1; [\Delta] \leqslant n_1} \left\{ |S_{[\Delta^-]-1}(\Delta^-)| \right\} \right\} + 1. \tag{8}$$

Пусть

$$C_2 > \frac{4C_1 + 2|a_0|}{|G_1|} \tag{9}$$

и

$$K_2 = \{ \Delta : \Delta \cap G_1 \neq \varnothing \quad \text{и} \quad S_{[\Delta]-1}(\Delta) \geqslant C_2 \}. \tag{10}$$

Из условия (5) следует, что

$$G_1 \subseteq \bigcup_{\Delta \in K_2} \Delta. \tag{11}$$

Рассмотрим множество интервалов

$$K = \{\Delta^- : \Delta \in K_1;\ [\Delta] \leqslant n_1\} \cup \{\Delta : \Delta \in K_1;\ \Delta \overline{\in} K_2;\ [\Delta] > n_1\} \cup \{\Delta : \Delta \in K_2\},$$

тогда соответствующая совокупность интервалов K^* (см. пункт II в) будет иметь вид

$$K^* = \{\Delta_{1,i}\} \cup \{\Delta_{2,j}\} \cup \{\Delta_{3,k}\},$$

где

$$\{\Delta_{1,i}\} \supseteq \{\Delta^- : \Delta \in K_1;\ [\Delta] \leqslant n_1\},\ \{\Delta_{2,j}\} \subseteq \{\Delta : \Delta \in K_1;\ \Delta \overline{\in} K_2;\ [\Delta] > n_1\} \tag{12}$$

$$\{\Delta_{3,k}\} \subseteq \{\Delta : \Delta \in K_2\}$$

причем классы интервалов $\{\Delta_{1,i}\}$, $\{\Delta_{2,j}\}$ и $\{\Delta_{3,k}\}$ попарно не пересекаются. (Не исключено, что первые два класса могут быть пустыми). Обозначим

$$E_1 = \bigcup_i \Delta_{1,i},\ E_2 = \bigcup_j \Delta_{2j};\ E_3 = \bigcup_k \Delta_{3,k}.$$

В силу соотношений (3) и (11) имеем

$$\left.\begin{array}{c} [0,1] = \bigcup\limits_{i=1}^{3} E_i \\ E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j \end{array}\right\} \tag{13}$$

Составим ряд

$$\Omega^{**} \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} \chi_k(x),$$

где $a_0^{**} = a_0$,

а при $k \geqslant 1$, $a_k^{**} = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_k \subseteq \Delta^* \text{ для некоторого } \Delta^* \in K^*. \\ a_k, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Положим

$$S_n^{**}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{**} \chi_k(x);\ \sigma_n^{**}(\gamma, x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} S_k^{**}(x).$$

Замечание 2. На любом интервале $\Delta^* \in K^*$ ряд Ω^{**} является рядом типа $H(\Omega, \Delta^*)$.

Согласно 2° пункта 11 в, выберем n_2 такое, что

$$\sum_{k > n_2} |\Delta_{3,k}| < \varepsilon. \tag{14}$$

Разложим E_3 на две непересекающиеся части E_1' и E_3''.

$$E_3' = \bigcup_{k \leqslant n_2} \Delta_{3,k};\ E_3'' = \bigcup_{k > n_2} \Delta_{3,k}. \tag{15}$$

Учитывая замечания 1 и 2, при помощи леммы 2 и соотношений (4), (8), (10), (12), не трудно убедиться в существовании такого n_0, что

$$\sigma_{n_0}^{**}(\gamma, x) > C_2, \text{ для всех } x \in E_3', \tag{16}$$

$$\sigma_{n_0}^{**}(\gamma, x) > -C_1, \text{ для всех } x \in E_3'' \cup E_1, \tag{17}$$

$$\sigma_{n_0}^{**}(\gamma, x) > -Q\frac{M + QC_2}{\gamma}, \text{ для всех } x \in E_2. \tag{18}$$

Из определения E_2 и из соотношений (7), (12), (14), (15) легко получить, что

$$|E_2| < \varepsilon,\quad |E_3'| > |G_1| - 2\varepsilon, \tag{19}$$

а из (13), (16), (17), (18), (19) имеем

$$a_0 = \int_0^1 \sigma_{n_0}^{**}(\gamma, x)\,dx = \int_{E_3'} + \int_{E_3'' \cup E_1} + \int_{E_2} > C_2|E_3'| - C_1|E_3'' \cup E_1| -$$

$$-Q\frac{M+QC_2}{\gamma}|E_2|>C_2(|G_1|-2\varepsilon)-C_1-Q\frac{M+QC_2}{\gamma}\varepsilon.$$

Откуда, учитывая (6) и (9), приходим к следующему противоречию:

$$a_0>|a_0|.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3. Доказательство теоремы 1 непосредственно получается из леммы 3 и теоремы B.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета.

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Հաարի շարքերի հանրագումարելիության մասին, Չեզարոյի և Հյոլդերի եղանակներով

Դիցուք $A=(\alpha_{k,p})$ *եռանկյուն, դրական, անվերջ մատրից է։ Կասենք, որ* A*— մատրիցը որոշում է* $T^{(\gamma)},(\gamma)_0)$ *գումարման եղանակ, եթե*

1. $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{k,p}=0;\quad p=0,1,\ldots$

2. $\sum\limits_{p=0}^{k}\alpha_{k,p}<Q;\quad k=0,\ 1,\ldots$

3. $\sum\limits_{p=[k/2]}^{k}\alpha_{k,p}>\gamma;\qquad k=2,3,\ldots$ ([ ] - *ամբողջ մաս*)

Հեշտ է ստուգել, որ Չեզարոյի $(C,\ \alpha)$ *գումարման եղանակները, երբ* $\alpha>-1$ *և Հյոլդերի* $(H,\ k)$ *գումարման եղանակները հանդիսանում են* $T^{(\gamma)}$, $(\gamma>0)$ *գումարման եղանակներ։ Դիտարկենք* $\Omega\sim\sum a_k\chi_k(x)$ *Հաարի շարքը և նշանակենք*

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\chi_k(x),\quad \sigma_n(\gamma,\ x)=\sum_{p=0}^{n}\alpha_{n,p}S_p(x):$$

Թեորեմ: Եթե որևէ չափելի $G(G\leqslant[0,1])$ բազմության վրա

$$\lim\ inf\ \sigma_n(\gamma,x)>-\infty,$$

ապա Ω շարքը զուգամիտում է G-ի համարյա բոլոր կետերում վերջավոր ֆունկցիայի:

Հետևանք: Դրական չափի բազմությունների վրա Հաարի շարքերը չեն հանրագումարվում $+\infty$ և ոչ մի $T^{(\gamma)}$, $(\gamma>0)$ գումարման եղանակով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз*, Теория ортогональных рядов, М., 1958. [2] *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян*, Мат. сборник, т. 66 (108), № 2 (1965). [3] *Ф. Г. Арутюнян*, ДАН Арм. ССР, т. XLII, № 3, (1966). [4] *R. F. Gundy*, Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series. Trans Amer. Math. Soc., 124, №2. (1966). [5] *В. А. Скворцов*, Математические заметки, 4 №1(1968). [6] *Г. М. Фихтенгольц* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, изд. седьмое, М., 1970.